ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004458

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	Щ Е Р Б А К О В
	Имя	А Л Е К С А Н Д Р
	Отчество	И Г О Р Е В И Ч
5.	Дата рождения	2 0 (число) 0 1 (месяц) 2 0 0 4 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Алтайский край
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Барнаул
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ СОШ 125

Место для скобы

Шифр 004458

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
25б	14.04.21	Гендрихо И.Ю.	[illegible]

№1

Пусть $\begin{cases} a = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} \\ b = x - \frac{1}{x} \\ c = \frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x} \end{cases}$, a, b, c – целые числа. Тогда сумма $a+b+c$ тоже будет целым числом.

$a+b+c = \cancel{\frac{1}{x}} - \cancel{\frac{1}{x^2+2021}} + x - \cancel{\frac{1}{x}} + \cancel{\frac{1}{x^2+2021}} - \frac{1}{x} =$

$= x - \frac{1}{x} = t \in \mathbb{Z}$

t принимает целые значения только в двух точках: $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{array}\right.$ Проверим, выполняется ли условие $a, b, c \in \mathbb{Z}$ для x_1 или x_2.

$a(x_1) = 1 - \frac{1}{2022} \notin \mathbb{Z}$

$a(x_2) = -1 - \frac{1}{2022} \notin \mathbb{Z}$. Значит не существует таких x, чтобы $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Ответ: такого числа не существует.

недост. обосн. 3б

1	2	3	4	5
3	5	5	5	7.

№2

$\sin(2x) + \sin^5(2x) + 2020\cdot\sin^9(2x) = \cos(4x) + \cos^5(4x) + 2020\cdot\cos^9(4x)$

Заменим $\begin{cases} \sin(2x) = a \\ \cos(4x) = b \end{cases}$, где $a, b \in [-1; 1]$. Получим уравнение

$a + a^5 + 2020\cdot a^9 = b + b^5 + 2020\cdot b^9$

Заметим, что a и b содержатся в довольно больших нечётных степенях, к тому же a^9 и b^9 умножаются на 2020, значит равенство достигается не так часто, например, в случае $a = b$.

$a = b$, т.е. $\sin 2x = \cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$

$2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$\sin 2x = \frac{-1 \pm 3}{4} = -1; \frac{1}{2}$

недост. обосн. 5б

$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = -1 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right.$, $n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = \frac{\pi}{12} + \pi n \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi n \end{array}\right.$, $n \in \mathbb{Z}$

Место для скобы

Шифр 004458

I №3

$P(t)=t^n+5t^{n-1}+3$, $n>1$, $n\in\mathbb{Z}$

Пусть $P(t)=A(t)\cdot B(t)$, где $A(t)$ и $B(t)$ - многочлены положительной степени с целыми коэффициентами.

1. Пусть $A(t)=(t+\alpha)$; $B(t)=(t^{n-1}+\beta)$, тогда

$A(t)\cdot B(t)=t\cdot t^{n-1}+\beta t+\alpha t^{n-1}+\alpha\beta=P(t)=t^n+5t^{n-1}+3$

Коэффициенты при соответствующих t^m ~~при~~ должны быть равны, т.е.

2. $t^n+\beta t+\alpha t^{n-1}+\alpha\beta=t^n+5t^{n-1}+3$

$\begin{cases}\alpha t^{n-1}=5t^{n-1}\\ \beta t=0\\ \alpha\beta=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=5\\ \beta=0\\ \alpha\beta=3\end{cases}$ Система не имеет решений, значит такое представление $P(t)=A(t)\cdot B(t)$ невозможно.

Приведём обоснование выбору в ① $A(t)=(t+\alpha)$; $B(t)=(t^{n-1}+\beta)$:
Во-первых - не важно, ~~[illegible]~~ какой из многочленов имеет данное значение (при умножении пары $(A(t);B(t))$ и $(B(t);A(t))$ дадут одинаковый результат.
Во-вторых - многочлены положительных степеней => наибольшая возможная степень для получения в произведении t^n равна t^{n-1} (при умножении на t). Коэффициенты в $A(t)$ и $B(t)$ целые, значит даже в отсутствии условия $\beta=0$ в ② $\begin{cases}\alpha=5\\ \alpha\beta=3\\ \alpha,\beta\in\mathbb{Z}\end{cases}$ не имеет решений.

Ответ: невозможно.

Недост. обосн.

5 б

Место для скобы

Шифр 004458

1 № 4

$$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x\cdot(x^2+\sqrt[3]{2020^4})} - \frac{\sqrt[3]{2020^4}\cdot x}{m+x^3}, \quad \begin{matrix} x>0 \\ m>0 \end{matrix}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} m \ne -x^3\cdot\sqrt[3]{2020^4} \\ x \ne 0 \\ m \ne -x^3 \end{cases}$$

Замена $\sqrt[3]{2020^4}\cdot x = \alpha > 0$

$$\frac{x^3}{m+\alpha} + \frac{m}{x^3+\alpha} + \frac{\alpha}{m+x^3} \le \frac{3}{2} \quad (1),$$

$$\begin{cases} x>0 \\ m>0 \\ \alpha>0 \end{cases}$$

5 б

Известно, что функция вида $f(a,b,c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$ при $a>0, b>0, c>0$ достигает своего минимума при $a=b=c$; $f_{min} = \frac{a}{2a}+\frac{a}{2a}+\frac{a}{2a} = \frac{3}{2}$.

(Проверка для $a \ne b \ne c$: $f(1,2,3) = \frac{1}{5} + \frac{2}{4} + \frac{3}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{5} > \frac{3}{2} \Rightarrow$ $f(a \ne b \ne c) > f_{min}$, если $a \ne b \ne c$).

Таким образом, (1) имеет единственное решение при $x^3 = \alpha = m$.

Недост. обосн.

$$x^3 = x\cdot\sqrt[3]{2020^4}$$

$$x^2 = \sqrt[3]{2020^4} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2020^2} > 0, \text{ что соотв. усл. } x>0.$$

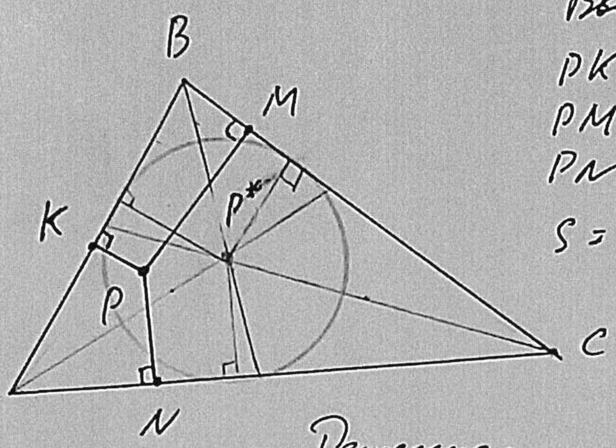
$$m = \sqrt[3]{2020^4}\cdot\sqrt[3]{2020^2} = 2020^2 > 0.$$

Ответ: $m = 2020^2$.

Место для скобы

Шифр

1№5



Введём обозначения;
$PK = k \quad AB = a$
$PM = m \quad BC = b$
$PN = n \quad AC = c \quad P^*$;
$S = \frac{b}{m} + \frac{c}{n} + \frac{a}{k}$; $\min(S)$ - ?

Решение:

По неравенству Коши оценим S: $S = \frac{a}{k} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \geqslant 3\sqrt{\frac{abc}{kmn}}$,
т.е. $\min(S) = 3\sqrt{\frac{abc}{kmn}}$, где $abc = const$ (стороны $\triangle ABC$).
Для $S \to \min$ нужно, чтобы $kmn \to \max$. В треугольнике сумма расстояний до выбраной внутреннего точки постоянна и равна большей высоте треугольника H. Т.е. $m+k+n = H$. Оценим mkn по нер-ву Коши: $m+k+n \geqslant 3\sqrt{mkn} \Rightarrow mkn \leqslant \frac{(m+k+n)^2}{9} = \frac{H^2}{9}$.
Значит $\max(mkn) = \frac{H^2}{9}$ и исходному условию удовлетворяют все такие P, для которых $3\sqrt{mkn} = m+k+n$, что выполняется, когда $m=k=n$, т.е. P - точка пересечения ~~биссектрис~~ биссектрис в $\triangle ABC$ (центр вписанной окружности)

<u>Ответ</u>: P - точка пересечения биссектрис в $\triangle ABC$ (центр вписанной окружности).

V 7б