ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

07275

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

Шифр

мет	МАТЕМАТИКА
нт	
	11
ния	ШАРЫПОВ
	ЕГОР
тво	АНТОНОВИЧ
рождения	09 (Число) 05 (Месяц) 2005 (Год)
а	РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
н *(пр: Томская обл., инградская область)*	КРАСНОЯРСКИЙ КРАЙ
ниципального образования *п, деревня, село, город)*	ГОРОД
енный пункт *(пр: Томск, ово, Псков)*	КРАСНОЯРСК
е наименование овательного учреждения, ром Вы обучаетесь в е время	Гимназия 13 „Академ"

асие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail зультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Шарыпов

Шифр 07275

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
28		Емельенова	Ем

1 2 3 4 5 6 7

7 7 – 7 7 28

Задача 1

$2x^2+2x^2z^2+z^2+7y^2-42y+33=0$

$x^2(2z^2+2)=-z^2-7y^2+42y-33$

$x^2=\frac{(-z^2-1)-7y^2+42y-32}{2(z^2+1)}$

$x^2=\frac{-7y^2+42y-32}{2(z^3+1)}-\frac{1}{2}$

~~Если y – чётное, то $(-7y^2)$ чёт, $(42y)$ чёт (-32)~~

$x^2\geq 0$

$\frac{-7y^2+42y-32}{2(z^2+1)}-\frac{1}{2}\geq 0 \quad \Big|\cdot(z^2+1),\ z^2+1>0$

$-7y^2+42y-32\geq z^2+1\geq 1$, значит $-7y^2+42y-33\geq 0$

~~Найдём нули $-7y^2+42y-32$~~

Найдём нули $-7y^2+42y-33$

$D_1=441-231=210$

$y=\frac{-21\pm\sqrt{210}}{-7}$

$y=3\pm\sqrt{\frac{30}{7}}$;

$y=3\pm\sqrt{4\frac{2}{7}}$

$2<\sqrt{4\frac{2}{7}}<3$

$5<3+\sqrt{4\frac{2}{7}}<6$

y – целое, $y_{max}=5$

$-3<-\sqrt{4\frac{2}{7}}<-2$

место для
скобы

Шифр 07275

$0 < 3 - \sqrt{4\frac{2}{7}} < 1$

$y_{min} = 1$

Таким образом $y \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Если $y = 1$: (случай 1)

$z^2 + 1 \leqslant -7 + 42 - 32$

$z^2 \leqslant 2$

$z \in \{-1; 0; 1\}$

$z = -1: x^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; x \in \varnothing$

$z = 0: x^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1; x = \pm 1$

$(x = 1, y = 1, z = 0)$ и $(x = -1; y = 1; z = 0)$ - корни

$z = 1: x^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; x \in \varnothing$

Если $y = 2$: (случай 2)

$z^2 + 1 \leqslant -7 \cdot 4 + 42 \cdot 2 - 32$

$z^2 \leqslant 23$

$z \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

$z = 4$ или $z = -4: x^2 = \frac{24}{34} - \frac{1}{2} = \frac{7}{34}; x \in \varnothing$

$z = 3$ или $z = -3: x^2 = \frac{24}{20} - \frac{1}{2} = \frac{14}{20}; x \in \varnothing$

$z = 2$ или $z = -2: x^2 = \frac{24}{10} - \frac{1}{2} = \frac{19}{10}; x \in \varnothing$

$z = 1$ или $z = -1: x^2 = \frac{24}{4} - \frac{1}{2} = \frac{22}{4}; x \in \varnothing$

$z = 0: x^2 = \frac{24}{2} - \frac{1}{2} = \frac{23}{2}; x \in \varnothing$

Если $y = 3$ (случай 3):

$z^2 + 1 \leqslant -7 \cdot 9 + 42 \cdot 3 - 32 = -63 + 126 - 32 = 31; z^2 \leqslant 30;$

скобы

Шифр 07275

$z \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

1) $z=-5$ или $z=5$: $x^2 = \frac{3\cancel{01}}{52} - \frac{1}{2} = \frac{\cancel{5}}{52}$; $x \in \varnothing$

2) $z=-4$ или $z=4$: $x^2 = \frac{3\cancel{01}}{34} - \frac{1}{2} = \frac{14}{34}$; $x \in \varnothing$

3) $z=-3$ или $z=3$: $x^2 = \frac{3\cancel{01}}{20} - \frac{1}{2} = \frac{16}{20}$; $x \in \varnothing$

4) $z=-2$ или $z=2$: $x^2 = \frac{31}{10} - \frac{1}{2} = \frac{26}{10}$; $x \in \varnothing$

5) $z=1$ или $z=-1$: $x^2 = \frac{31}{4} - \frac{1}{2} = \frac{29}{4}$; $x \in \varnothing$

6) $z=0$: $x^2 = \frac{31}{2} - \frac{1}{2} = 15$; $x \in \varnothing$

Если $y=4$: $-7y^2+42y-32 = -7\cdot16+42\cdot4-32 = 24$

$z \in \{\cancel{-4; -3; -2}; -1; 0; 1; 2; 3; \cancel{4; 5}\}$ Таким образом этот случай

$x^2 = \frac{24}{}$ аналогичен тому, в котором ~~соответственно~~ соответствующее

значение также равно 24

Если $y=5$, то ~~-7~~ $-7y^2+42y-32=3$

Таким образом этот случай аналогичен случаю 1, в котором

соответствующее значение также равно 3, и также он даёт

корни $(x=1; z=0; y=5)$ и $(x=-1; z=0; y=5)$

Ответ: $(1;1;0)$ $(-1;1;0)$ $(1;5;0)$ $(-1;5;0)$

~~Задача 2~~

~~$2^{\lg(x^2-2023)} = \lg 2^{x^2-2022}$~~

Задача 4

Т.к. $a \neq 0$, у $g(x) = x^3 - x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}$ такие же корни, как и

у исходной функции, тогда

$g(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, т.к. $g(x)$ – приведённый

многочлен

скобы

Шифр 7275

$$x^3 - x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b}{a} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

$$\begin{cases} -1 = -(x_1 + x_2 + x_3) \\ (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = \frac{b}{a} \\ -x_1x_2x_3 = \frac{b}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -x_1x_2x_3 \end{cases}$$

0 не является корнем, $g(0) = \frac{b}{a}$; $\frac{b}{a} \neq 0$

Значит $x_1x_2x_3 \neq 0$, и второе уравнение можно поделить на это выражение

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = -1 \end{cases}$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1, \text{ ч.т.д.}$$

Задача 5

Найдем, чему равна длина хорды, стягивающая дугу в α градусов в окружности радиуса R — в L (дл l)

Если $\alpha \leqslant 180°$, то рассмотрим треугольник с вершинами в центре окружности и концах хорды; в нём угол, опирающийся на хорду равен α как центральный.

По т. косинусов

$$l^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\alpha$$

$$l = \sqrt{2R^2 - 2R^2\cos\alpha}$$

Если $\alpha > 180°$, то центральный угол в аналогичном

Место для скобы

Шифр 7275

треугольнике равен $360^\circ - \alpha$;

тогда $l = \sqrt{2R^2 - 2R^2\cos(360^\circ - \alpha)} = \sqrt{2R^2 - 2R^2\cos\alpha}$

~~таким~~ Пусть дуга по часовой стрелке с началом в M и концом в MF ~~стягива~~ равна α; тогда ~~$\cup KF = (\alpha+120)^\circ$~~

~~$\cup MF =$~~ $\cup KF = \cup MF + \cup KM = \cancel{60}\ 120^\circ + \alpha$

$\cup NF = \cup NK + \cup KF = 240^\circ + \alpha$

$FM^4 + FN^4 + FK^4 =$

$\left(\sqrt{2R^2 - 2R^2\cos\alpha}\right)^4 + \left(\sqrt{2R^2 - 2R^2\cos(\alpha - \frac{2\pi}{3})}\right)^4 + \left(\sqrt{2R^2 - 2R^2 \cdot \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3})}\right)^4 =$

$4R^4\left((1-\cos\alpha)^2 + (1 + \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha)^2 + (1 + \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha)^2\right) = 4R^4\left(1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + 1 + \frac{1}{4}\cos^2\alpha + \frac{3}{4}\sin^2\alpha + \cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\alpha \cdot \sin\alpha + 1 + \frac{1}{4}\cos^2\alpha + \frac{3}{4} \cdot \sin^2\alpha + \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\alpha\sin\alpha\right) = 4R^2\left(3 + \frac{6}{4}\cos^2\alpha + \frac{6}{4}\sin^2\alpha\right) = 4R^4\left(3 + \frac{3}{2}\right) = 18R^4$

Независимо от выбора F искомое выражение равно $18R^4$

Задача 2

$2^{\lg(x^2-2023)} - \lg 2^{(x^2-2022)} = 0$

Пусть $t = x^2 - 2023$, $t > 0$

$2^{\lg t} - \lg 2^{t+1} = 0$

$t^{\lg 2} - t\lg 2 - \lg 2 = 0$

~~$t^{\lg 2} = t \cdot \lg 2$~~ Пусть $f(t) = t^{\lg 2} - t\lg 2 - \lg 2 = 0$

Найдём её экстремумы, для этого решим уравнение $f'(t) = 0$

скобы

Шифр 7275

$\lg 2\, t^{(\lg 2-1)} - \lg 2 = 0$

$t^{\lg 2 - 1} = 1$

$t = 1$

$f(t) \nearrow$ на $[1; +\infty)$ $f(t) \searrow$ на $(0; 1]$

$f(1) = 1 - 2\lg 2 = \lg 10 - \lg 4 = \lg 2{,}5$; $\lg 2{,}5 > 0$

$f(10) = 2 - 10\lg 2 - \lg 2 = 2 - 11\lg 2 = \lg \frac{4}{2048} = \lg \frac{1}{512}$

$f(10) < 0$

Значит f пересекает ось абсцисс в точке a, $a \in (1; 10)$

$\lim\limits_{t \to 0} f(t) = -\lg 2$; $-\lg 2 < 0$

Значит f пересекает ось абсцисс в точке b, $b \in (0; 1)$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2023 = a \\ x^2 - 2023 = b \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{a + 2023} \\ x = \pm\sqrt{b + 2023} \end{array}\right.$$

Ответ: 4 корня