ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

04461

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	Ш А Р А Ф И С Л А М О В А
	Имя	А Л С У
	Отчество	М А Р А Т О В Н А
5.	Дата рождения	0 8 (число) 0 3 (месяц) 2 0 0 3 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Свердловская область
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Екатеринбург
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МАОУ гимназия 35

Место для скобы

Шифр 004461

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
17б	14.04.21	Гендрина И.Ю.	

① $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$; $x-\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$;

Пусть $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}=\frac{x^2+2021-x}{x(x^2+2021)}\in Z$. Заметим, что в таком случае и $-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}\right)=\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}\in Z$.

Числитель $\frac{x^2+2021-x}{x(x^2+2021)}$: $x^2+2021-x=0$

$D=1-2021\cdot 4<0$; ⇒ корней не имеет

⇓

нельзя разложить на множители

⇓

1	2	3	4	5
7	5	2	2	1

7б

~~для~~ Т.к. для того, чтобы $\frac{x^2+2021-x}{x(x^2+2021)}\in Z$, нужно, чтобы $(x^2+2021-x)\vdots x(x^2+2021)$, а значит

$$\left[\begin{array}{l} x(x^2+2021)=\pm 1 \quad (а) \\ \cancel{x^2+2021-x} \\ x(x^2+2021)=\pm(x^2+2021-x) \quad (б) \end{array}\right.$$

(а) $\left[\begin{array}{l} x^3+2021x+1=0 \\ x^3+2021x-1=0 \end{array}\right.$

По теореме Безу корень(ни) у каждого из этих уравнений должен быть целым, т.к. ~~его знам~~ знаменатель корня должен нацело делиться на коэф. при x^3, который равен 1. (Также числитель должен делиться на своб. член, т.е. ~~быть равным ±~~ возможные корни — ± 1, но они не подходят).

(б) $\left[\begin{array}{l} x^3+2021x=x^2+2021-x \\ x^3+2021x=-x^2-2021+x \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^3-x^2+2022x-2021=0 \\ x^3+x^2+2020x+2021=0 \end{array}\right.$

Аналогично по теореме Безу корни данных ~~уравн~~ многочленов могут быть только целыми числами, т.к. коэф. при x: ± 1 и

Место для скобы

свободный член $\pm 2021 \in Z$.

Шифр 004461

Но при $x \in Z$ $\left(x - \frac{1}{x}\right) \in Z$ за исключением $x = 1$, но при $x = 1$ множеству целых не принадлежат $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$ и $\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$; $\Rightarrow$ Ответ: не существует такого числа x, что все три данных числа являются целыми.

(2) $\sin(2x) + \sin^5(2x) + 2020 \cdot \sin^9(2x) = \cos(4x) + \cos^5(4x) + 2020 \cdot \cos^9(4x)$

т.к. ~~сте~~ все степени данного уравнения нечётны, то оно имеет корни только при

Недост. обоснование

$\sin(2x) = \cos(4x)$

$\boxed{\sin(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}$

Тогда $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos(4x)$

$\frac{\pi}{2} - 2x = \pm 4x + 2\pi n \rightarrow \left[\begin{array}{l} -2x = 4x + 2\pi n - \frac{\pi}{2} \\ -2x = -4x + 2\pi n - \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} -6x = 2\pi n - \frac{\pi}{2} \\ 2x = 2\pi n - \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$

5 б

$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} n + \frac{\pi}{12} \\ x = \pi n - \frac{\pi}{4} \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3} n$;

$-\frac{\pi}{4} + \pi n$

~~(3)~~ (4) $m - ?$ $(m > 0)$ при которых $x > 0$

$$\frac{x^3}{m + \sqrt[3]{2020^4} \cdot x} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x^3 + x \cdot \sqrt[3]{2020^4}} - \frac{\sqrt[3]{2020^4} \cdot x}{m + x^3};$$

$$\frac{x^3}{m + \sqrt[3]{2020^4} \cdot x} + \frac{m}{x^3 + x\sqrt[3]{2020^4}} + \frac{\sqrt[3]{2020^4} \cdot x}{m + x^3} \le \frac{3}{2}$$

скобы

слева и справа в неравенство добавим 3 (по единице к каждой дроби слева)

$$\frac{x^3+m+x\sqrt[3]{2020^4}}{m+\sqrt[3]{2020^4}}+\frac{m+x^3+x^3\sqrt[3]{2020^4}}{x^3+x\cdot\sqrt[3]{2020^4}}+\frac{m+x^3+x^3\sqrt[3]{2020^4}}{m+x^3}\le\frac{9}{2}$$

$$x^3+m+x^3\sqrt[3]{2020^4}\left(\frac{1}{m+\sqrt[3]{2020^4}}+\frac{1}{x^3+x^3\sqrt[3]{2020^4}}+\frac{1}{m+x^3}\right)\le\frac{9}{2}$$

II. Из неравенства о средних: $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\Big|\cdot n$

$$a_1+\ldots+a_n\geqslant\frac{n^2}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}};$$

$$(a_1+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2$$

Заметим, что если $a_1=m+\sqrt[3]{2020^4}$

$a_2=x^3+x^3\sqrt[3]{2020^4}$

$a_3=m+x^3$, то

$x^3+m+x^3\sqrt[3]{2020^4}=\frac{a_1+a_2+a_3}{2}$

Тогда, применив к данным задачи неравенство о средних, получим:

$$2\left(x^3+m+x^3\sqrt[3]{2020^4}\right)\left(\frac{1}{m+x\sqrt[3]{2020^4}}+\frac{1}{x^3+x\cdot\sqrt[3]{2020^4}}+\frac{1}{m+x^3}\right)\geqslant 9;$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\left(x^3+m+x^3\sqrt[3]{2020^4}\right)\left(\frac{1}{m+x\sqrt[3]{2020^4}}+\frac{1}{x^3+x\cdot\sqrt[3]{2020^4}}+\frac{1}{m+x^3}\right)}_{A}\geqslant\frac{9}{2}$$

но по условию выражение $A\le\frac{9}{2}$; $\Rightarrow$ решением системы этих неравенств будет $A=\frac{9}{2}$; $\Rightarrow$

$$\left(x^3+m+x^3\sqrt[3]{2020^4}\right)\left(\frac{1}{m+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x}+\frac{1}{x^3+x\cdot\sqrt[3]{2020^4}}+\frac{1}{m+x^3}\right)=\frac{9}{2}$$

Нет ответа на вопрос

2 б

(3) $p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3;\ n > 1;\ n \in \mathbb{Z}$

По теореме Безу корни данной функции ~~будут~~ могут быть только делителями 3, т.е: $\pm 1; \pm 3$.

$$\begin{array}{l|l} t^n + 5t^{n-1} + 3 & t-3 \\ -\ t^n - 3t^{n-1} & t^{n-1} + 8t^{n-2} \\ \hline \quad 8t^{n-1} + 3 & \\ \quad -\ 8t^{n-1} - 24t^{n-2} & \\ \hline \quad 24t^{n-2} + 3 & \end{array}$$

— остаток

$$\begin{array}{l|l} t^n + 5t^{n-1} + 3 & t+3 \\ -\ t^n + 3t^{n-1} & t^{n-1} + 2t^{n-2} \\ \hline \quad 2t^{n-1} + 3 & \\ \quad -\ 2t^{n-1} + 6t^{n-2} & \\ \hline \quad 3 - 6t^{n-2} & \end{array}$$

остаток

2б

$$\begin{array}{l|l} t^n + 5t^{n-1} + 3 & t-1 \\ -\ t^n - t^{n-1} & t^{n-1} + 6t^{n-2} \\ \hline \quad 6t^{n-1} + 3 & \\ \quad -\ 6t^{n-1} - 6t^{n-2} & \\ \hline \quad 3 + 6t^{n-2} & \end{array}$$

остаток

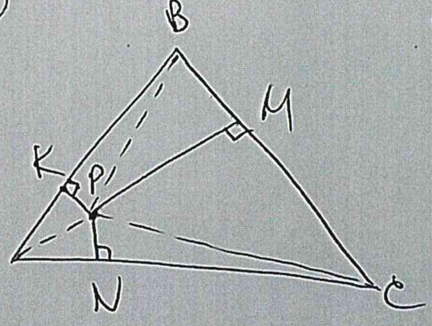
$$\begin{array}{l|l} t^n + 5t^{n-1} + 3 & t+1 \\ -\ t^n + t^{n-1} & t^{n-1} + 4t^{n-2} \\ \hline \quad 4t^{n-1} + 3 & \\ \quad -\ 4t^{n-1} + 4t^{n-2} & \\ \hline \quad 3 - 4t^{n-2} & \end{array}$$

остаток

Обоснование недостаточное

Значит, $p(t)$ невозможно представить в виде произв. многочленов положит. степени с целыми коэф.

(5)



$P \in \triangle ABC;\ PM \perp BC;\ PN \perp AC;\ PK \perp AB.$

Найти: P, для к-рого $\left(\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK}\right) \min$

Решение: Заметим, что $\frac{1}{2}(BC \cdot PM + AC \cdot PN + AB \cdot KP) = S_{\triangle ABC} = const;$

$(PN + PK + PM)^2 \le 3(PN^2 + PK^2 + MP^2)$

1б