ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

07429

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

мет	МАТЕМАТИКА
ант	1
:	11
лия	Сергиенко
	Иван
тво	Дмитриевич
рождения	05 (Число) 07 (Месяц) 2005 (Год)
а	Россия
н *(пр: Томская обл., инградская область)*	Новосибирская область
ниципального образования *п, деревня, село, город)*	город
енный пункт *(пр: Томск, ово, Псков)*	Карасук
е наименование овательного учреждения, ром Вы обучаетесь в е время	МБОУ технический лицей №176

асие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail зультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ________

1 | 2 | 3 | 4 | 5
7 | 0 | 5 | 7 | 2

Шифр 07429

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
21б	30.03.23	[illegible]	[illegible]

№4

$ax^3 - ax^2 + bx + b = 0$ (поделим на a)

$x^3 - x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b}{a} = 0$ (кубическое уравнение)

т. Виета для куб. ур.

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{b}{a} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

7б

$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1$ (упростим 2-ю скобку)

$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3}\right) = -1$ $\Rightarrow 1 \cdot \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}\right) = -1 \Rightarrow -1 = -1$

т. Виета для куб. ур.

ч.т.д.

№1

7б

$2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 + 7y^2 - 42y + 33 = 0$ (вынесем $2x^2$ за скобку)

$2x^2(1 + z^2) + z^2 + 7y^2 - 42y + 33 = 0$ (добавим к z^2, +1 и -1)

$2x^2(1 + z^2) + (z^2 + 1) - 1 + 7y^2 - 42y + 33 = 0$ (вынесем 7 за скобку)

$2x^2(1 + z^2) + (z^2 + 1) - 1 + 7(y^2 - 6y) + 33 = 0$ (добавим +9 до полного квадрата)

$2x^2(1 + z^2) + (z^2 + 1) - 1 + 7(y^2 - 6y + 9) - 63 + 33 = 0$ (упрощаем)

$(1 + z^2)(2x^2 + 1) + 7(y - 3)^2 - 31 = 0$ (перенесем -31)

$(1 + z^2)(2x^2 + 1) + 7(y - 3)^2 = 31$ (метод подобора)

Пусть $y = 6$; $(1 + z^2)(2x^2 + 1) + 7(6 - 3)^2 = 31$

$(1 + z^2)(2x^2 + 1) + 7 \cdot 9 = 31$

$(1 + z^2)(2x^2 + 1) + 63 = 31$ $\varnothing$ – т.к. $(1 + z^2)(2x^2 + 1) \geq 0$

скобы

Шифр 07429

Пусть $y=5$: $(1+z^2)(2x^2+1)+7(5-3)^2=31$

$(1+z^2)(2x^2+1)+\underbrace{7\cdot 4}_{28}=31$

$(1+z^2)(2x^2+1)=3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(1+z^2)=3 \Rightarrow \varnothing \\ (1+z^2)=1 \Rightarrow z=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}2x^2+1=3 \Rightarrow x=1 \\ 2x^2+1=1 \varnothing\end{array}\right.$

$x=1;\ y=5;\ z=0$

Пусть $y=4$: Аналогично при $y=5 \Rightarrow (1+z^2)(2x^2+1)=24 \Rightarrow \varnothing$

Пусть $y=3$: Аналогично при $y=5 \Rightarrow (1+z^2)(2x^2+1)=31 \Rightarrow \varnothing$

Пусть $y=2$: Аналогично при $y=4 \Rightarrow \varnothing$

Пусть $y=1$: Аналогично при $y=5 \Rightarrow \varnothing$ $(1+z^2)(2x^2+1)=3 \Rightarrow x=1;\ z=0$

Пусть $y=0$: Аналогично при $y=6 \Rightarrow 0 \Rightarrow$ ~~нет~~ Нет смысла брать числа <0 и >6.

Т.к $x^2 \Rightarrow x=\pm 1$ – в обоих вариантах
~~$x=\pm 1$~~

Ответ: $(\pm 1; 5; 0)$ $(\pm 1; 1; 0)$

№3

$$\frac{2a}{3(b+c)}+\frac{2b}{3(a+c)}+\frac{2c}{3(a+b)} \geq 1 \quad \Big| \cdot \frac{3}{2}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \qquad a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \leq \frac{a}{2\sqrt{ab}}+\frac{b}{2\sqrt{ac}}+\frac{c}{2\sqrt{ac}} \geq \frac{3}{2}$$

Т.к $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, то мы можем заменить их, но при условии, что будет знак $\geq$, т.к знаменатель уменьшился

$$\frac{a}{\sqrt{ab}}+\frac{b}{\sqrt{ac}}+\frac{c}{\sqrt{ac}} \geq 3$$

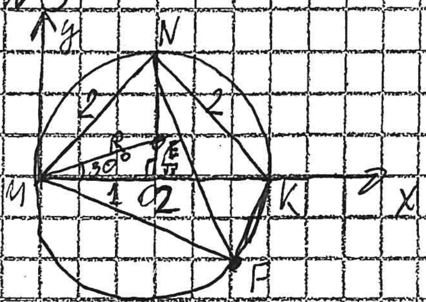
$$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}}{\sqrt{abc}} \geq 3$$

Шифр 07429

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{abc}} \geq 3$$

$$\frac{\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{3}}{\sqrt{abc}} \geq \frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt{abc}} = \frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{abc}}$$ ч т д.

№5



Дано:

MNK – треугольник равносторонний

F – т на окр.

$FM^4+FN^4+FK^4=const$

Бросим координаты x и y. Пусть сторона равна 2

$MO=\sqrt{4-1}$ – по т. Пифагора

$MO=\sqrt{3}$

Снимем координаты:

$M(0;0)$ $\vec{FM}\{-x_1;-y_1\}$

$N(1;\sqrt{3})$ $\vec{FN}\{1-x_1;\sqrt{3}-y_1\}$

$K(2;0)$ $\vec{FK}\{2-x_1;-y_1\}$

$F(x_1;y_1)$

В 4 степени решение сложное, поэтому начнем со 2 степени.

$FM^2+FN^2+FK^2$

$a^2=|a|^2$

$FM^2=\sqrt{(-x_1)^2+(-y_1)^2}^2$

$FN^2=\sqrt{(1-x_1)^2+(\sqrt{3}-y_1)^2}^2$

$FK^2=\sqrt{(2-x_1)^2+(-y)^2}^2$

$\sqrt{(-x_1)^2+(-y_1)^2}^2+\sqrt{(1-x_1)^2+(\sqrt{3}-y_1)^2}^2+\sqrt{(2-x_1)^2+(-y)^2}^2=$

$=(-x_1)^2+(-y_1)^2+(1-x_1)^2+(\sqrt{3}-y_1)^2+(2-x_1)^2+(-y)^2=$

$=x_1^2+y_1^2+1-2x_1+x_1^2+3-2\sqrt{3}y_1+y_1^2+4-4x_1+x_1^2+y^2=$

$=3x_1^2+3y_1^2-6x-2\sqrt{3}y+8=3(x^2-2x)+3y^2-2\sqrt{3}=3(x^2-2x+1)+$

$+((\sqrt{3}y)^2-2\sqrt{3}y+1)+4=3(x_1-1)^2+(\sqrt{3}y_1-1)^2+4$

Найдем R:

$tg\,30^\circ = \frac{OE}{1}$ По т. Пифагора

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{OE}{1} \Rightarrow OE = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $R = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Найдем координаты т. O ~~$(1; \frac{1}{\sqrt{3}})$~~ $(1; \frac{1}{\sqrt{3}})$

Составим уравнение окружности:

$(x-1)^2 + (y - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$ - немного изменим

$$\left.\begin{array}{l} 3(x_1-1)^2 + (\sqrt{3}y_1 - 1)^2 = 4 \\ 3(x_1-1)^2 + (\sqrt{3}y_1 - 1)^2 + 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4+4=8 \Rightarrow FN^2 + FM^2 + FK^2 = const$$

$= 8$ ч.т.д.