КРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

07066

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

Шифр

:	математика
	1
	9
я	САВИТСКАЯ
	СОФЬЯ
о	АЛЕКСЕЕВНА
ждения	15 (Число) 04 (Месяц) 2007 (Год)
	РОССИЯ
пр: Томская обл., градская область)	Томская обл.
ципального образования деревня, село, город)	город
ный пункт (пр: Томск, о, Псков)	СЕВЕРСК
наименование тельного учреждения, м Вы обучаетесь в ремя	МБОУ СОШ N88 имени А. Бородина и А. Кочева

ие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail льтатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ___________________

Шифр 07066

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
14	29.03.23	Хмылёва Т. Е	ТХмы

1	2	3	4	5
0	7	7	–	0

1. $2y^2 - xy - x^2 + 2y + 7x - 84 = 0$

Если $x=0$, то $2y^2 + 2y - 84 = 0$

$D = 4 + 672 = 676 = 26^2$

$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$y_1 = \frac{-28}{4} = -7$

$y_2 = \frac{24}{4} = 6$

Если $x = 1$, то $2y^2 - y - 1 + 2y + 7 - 84 = 0$

$2y^2 + y - 78 = 0$

$D = 1 + 624 = 625 = 25^2$

$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$y_1 = \frac{24}{4} = 6$

$y_2 = \frac{-26}{4} = -6\frac{2}{4} = -6,5$

Если $x = 2$, то $2y^2 - 2y - 4 + 2y + 14 - 84 = 0$

$2y^2 - 74 = 0$

$y^2 = 37$

Если $y = 0$, то $-x^2 + 7x - 84 = 0$

$D < 0$

Если $y = 1$, то $2 - x - x^2 + 2 + 7x - 84 = 0$

$-x^2 + 6x - 80 = 0$

$D < 0$

Если $y=2$, то $8-2x-x^2+4+7x-84=0$

$-x^2+5x-72=0$

$D<0$

2. Любое число, кратное 2025, будет оканчиваться на 0 или 5, т.к. на конце стоит 5.

Узнаем, могут ли 5 ~~членов~~ этой последовательности оканчиваться на 0 или 5. Для этого выпишем последние цифры для чисел в степенях.

Последняя цифра числа \ Степень	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	6	2	4
3	3	9	7	1	3	9
4	4	6	4	6	4	6
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	9	3	1	7	9
8	8	4	2	6	8	4
9	9	1	9	1	9	1

Заметим, что начиная с 5 степени, последние цифры чисел начинают повторяться, и среди них нет последовательности из 0 и 5, значит, в последовательности $x_n=1+2^n+3^n+4^n+5^n$ нет 5 послед. идущих чисел кратных 2025.

Ответ: невозможно

3. $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \le 3(a+b+c)$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \le 3(a+b+c)$

$a+\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}+b+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}+c \le 3a+3b+3c$

$a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc} \le 3a+3b+3c$

$2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc} \le 3a-a+3b-b+3c-c$

$2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc} \le 2a+2b+2c$

Из неравенства Коши следует:

$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

$\sqrt{ac} \le \frac{a+c}{2}$

$\sqrt{bc} \le \frac{b+c}{2}$

Сложим неравенства:

$\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc} \le \frac{a+b}{2}+\frac{a+c}{2}+\frac{b+c}{2}$

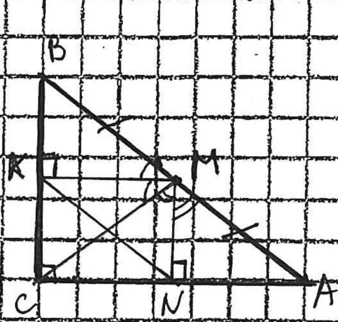
Домножим обе части на 2:

$2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc} \le a+b+a+c+b+c$

$2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc} \le 2a+2b+2c$

ч.т.д.

5.



Дано:
$\triangle ABC$
$M \in AB$
AB - гипотенуза
MK - биссектриса $\angle BMC$
MN - биссектриса $\angle AMC$
$K \in BC$, $N \in CA$
$CM = KN$
Доказать: $BM = MA$

Доказательство.

Рассмотрим четырехугольник CKMN. Его диагонали CM и KN равны по условию, а $\angle KCN$ прямоугольный по условию. Значит, CKMN - прямоугольник

Тогда KC ∥ MN как противолежащие стороны прямоугольника
$\Downarrow$
CB ∥ MN, т.к. KC и BC лежат на 1 прямой

Рассмотрим $\triangle BKM$ и $\triangle MNA$

$\angle MBK = \angle AMN$ как соответствующие при параллельных прямых BC и MN и секущей BM.

$\angle BKM$ и $\angle MKC$ – смежные, $\angle MKC = 90°$ как угол прямоугольника $\Rightarrow \angle MKB = 180° - \angle MKC = 180° - 90° = 90°$

$\angle ANM$ и $\angle MNC$ – смежные, $\angle MNC = 90°$ как угол прямоугольника $\Rightarrow \angle MNA = 180° - \angle MNC = 180° - 90° = 90°$

Значит, $\angle BKM = \angle MNA = 90°$

Так как MK является биссектрисой и высотой для $\triangle BMC$, то он является равнобедренным, и $BM = MC$

Так как MN является биссектрисой и высотой для $\triangle CMA$, то он является равнобедренным, и $MC = MA$

$BM = MC$, $MC = MA \Rightarrow BM = MA$

Т.к. $\triangle BMC$ – равнобедренный, $BK = KC$, поскольку MK – ~~высота биссектриса~~ медиана (поскольку она проведена к основанию равноб. $\triangle$ и яв. высотой и биссектр.)

$KC = MN$ как противоположные стороны прямоугольника

Значит, $BK = KC = MN$

Тогда $\triangle BKM = \triangle MNA$ по стороне и прилежащим к ней углам

Тогда $BM = MA$, а значит, M – середина гипотенузы AB
ч.т.д.