ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004433

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	Р У Т К О В С К А Я
	Имя	А Н А С Т А С И Я
	Отчество	А Л Е К С Е Е В Н А
5.	Дата рождения	2 3 (число) 0 8 (месяц) 2 0 0 3 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Кемеровская область - Кузбасс
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Новокузнецк
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБ НОУ "Лицей 84 им. В.А.Власова"

№2 004433

$\sin(2x)+\sin^5(2x)+2020\cdot\sin^9(2x)=\cos(4x)+2020\cdot\cos^9(4x)+\cos^5(4x)$

Решение:

Пусть $t=\sin(2x)$; $g=\cos(4x)$

Тогда: $f(t)=t+t^5+2020t^9$

$f(g)=g+g^5+2020g^9$

Найдем производные $f'(t)$ и $f'(g)$:

$f'(t)=1+5t^4+9\cdot2020t^8$

$f'(g)=1+5g^4+9\cdot2020g^8$

они никогда не равны 0 (степени четные; $D<0$).

$f'(t)>0$; $f'(g)>0$.

По условию: $f(t)=f(g)$

Т.к. обе функции

то $t=g$ (т.к. $f(t)=f(g)$)

$\sin(2x)=\cos(4x)$

$\sin(2x)=1-2\sin^2(2x)$

$2\sin^2(2x)+\sin(2x)-1=0$

1	2	3	4	5	Σ
4	6	0	5	4	19

Ш.Ф.Г.

Пусть $\sin(2x)=a$

$2a^2+a-1=0$

$D=1+8=9=3^2$

$\left[\begin{array}{l}a_1=\frac{-1+3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\\ a_2=\frac{-1-3}{4}=\frac{-4}{4}=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin(2x)=\frac{1}{2}\quad(1)\\ \sin(2x)=-1\quad(2)\end{array}\right.$

(1) $\sin(2x)=\frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ 2x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{5\pi}{12}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

(2) $\sin(2x)=-1$

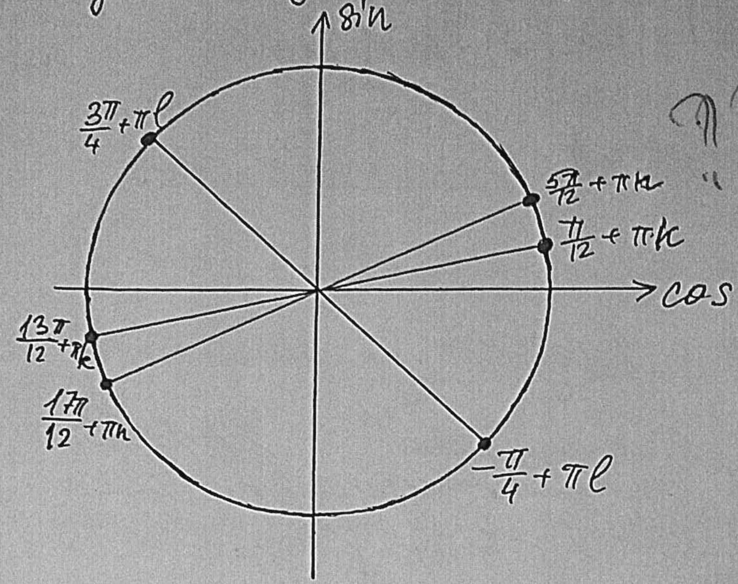
$2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi l,\ l\in\mathbb{Z}.$

№5

Найдем объединение корней.

004433



Тогда увидим, что

$x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}$.

$\frac{5\pi}{12}\approx\frac{\pi}{2}$, чего мало.

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}$.

1

№5

$\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$ – min значение для т. P.

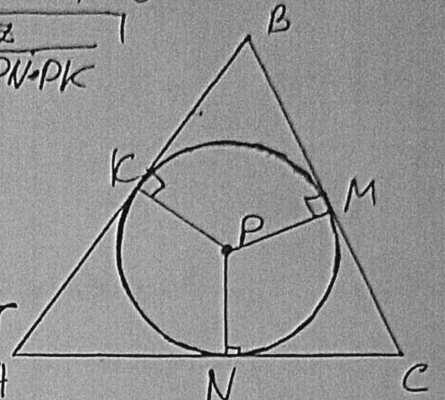
004433

Решение

Пусть $BC=x$; $AC=y$; $AB=z$

Рассмотрим неравенство о среднем

$$\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}=\frac{x}{PM}+\frac{y}{PN}+\frac{z}{PK}\geq 3\sqrt[3]{\frac{xyz}{PM\cdot PN\cdot PK}}$$



Минимальное значение

$\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$ будет тогда,

когда $\frac{x}{PM}+\frac{y}{PN}+\frac{z}{PK}=3\sqrt[3]{\frac{xyz}{PM\cdot PN\cdot PK}}$

Такое возможно только когда $x=y=z$ (то есть стороны $\triangle ABC$ равны между собой, то есть он равносторонний) и $PM=PN=PK$ (высоты, опущенные из т. P равны) Это и надо д-ть

Но если $PM=PN=PK$, то т. P – точка центра вписанной окружности, а $PM=PN=PK=r$

r – радиус вписанной окружности в $\triangle ABC$.

Ответ: сумма будет минимальной, если т. P – центр вписанной окружности в $\triangle ABC$

$\neq$

№1

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$; $x-\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$.

Решение:

Заметим, что $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}=-\left(\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}\right)$

$f_1(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$

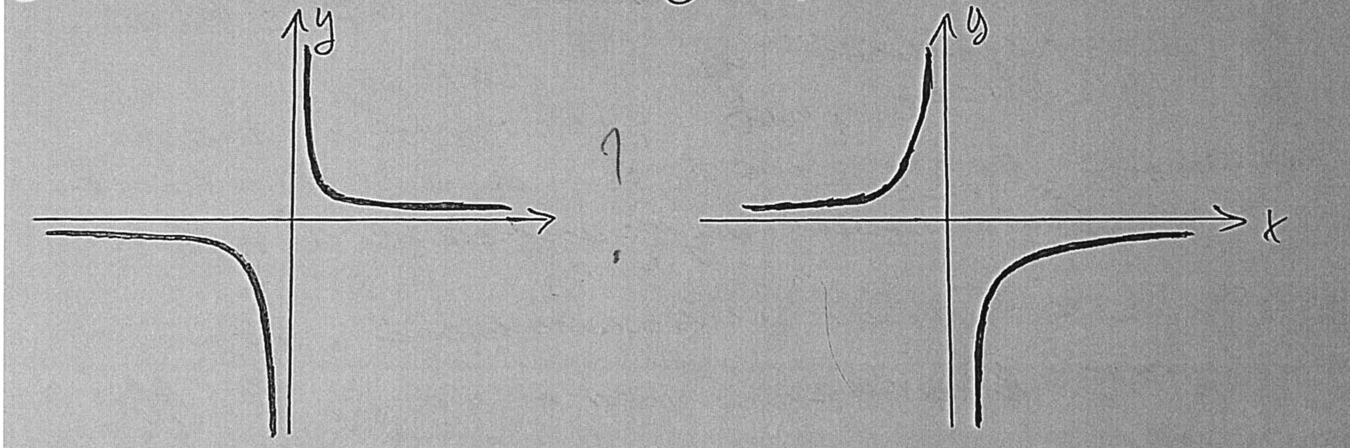
$f_2(x)=x-\frac{1}{x}$

$f_3(x)=\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}=-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}\right)=-f_1(x)$

Значит можно рассмотреть целостность одного из f_1 и f_3 и целостность f_2

Изобразим f_1, f_2, f_3 схематично:

① $f_1(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$ ② $f_3(x)=-f_1(x)$



Т.к. по условию f_1 и f_2 должны быть ... то рассмотрим их сумму (сумма целых всегда равна целому числу):

$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}+x-\frac{1}{x}=x-\frac{1}{x^2+2021}$ — должно быть целым

Функцию $f(x)$ можно представить в виде $y=kx+b+\alpha(x)$, где $k, b\in R$ (в нашем случае $k=1$; $b=0$)

$\alpha(x) = -\frac{1}{x^2+2021}$

Найдем предел $\alpha(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2+2021}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^2\cdot\frac{1}{x^2}}{x^2\left(1+\frac{2021}{x^2}\right)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{2021}{x^2}\right)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2021}{x^2}\right)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Если функция представима в виде $f(x) = kx+b+\alpha(x)$, где $k, b \in R$ и $\alpha(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, то $y = kx+b$ – прямая, является наклонной асимптотой графика функции $f(x)$

Значит $y = x$ – наклонная асимптота графика $f(x) = x - \frac{1}{x^2+2021}$

Ф-я ~~такое~~ нет

Т.к. $y=x$ принимает целые значения, то $f(x) = x - \frac{1}{x^2+2021}$ будет стремиться к $y=x$ (то есть к целому значению), но никогда его не примет.

Значит, не существует такого x, при котором все три числа будут целыми

Ответ: нет, такого числа не существует.

±

№4

$$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^{4}}\cdot x} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x(x^2+\sqrt[3]{2020^{4}})} - \frac{\sqrt[3]{2020^{4}}\,x}{m+x^3}$$

Дано: $m>0$; $x>0$.

Решение:

Пусть $x^3=a$; $x\cdot\sqrt[3]{2020^{4}}=b$

Т.к. по условию $x>0$, то $a>0$; $b>0$.

$$\frac{a}{m+b} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{a+b} - \frac{b}{m+a}$$

$$\frac{a}{m+b} + \frac{m}{a+b} + \frac{b}{m+a} \le \frac{3}{2}.$$

Рассмотрим неравенство о средних и найдем минимальное значение для

$$f=\frac{a}{m+b} + \frac{m}{a+b} + \frac{b}{m+a}.$$

$$\frac{a}{m+b} + \frac{m}{a+b} + \frac{b}{m+a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{amb}{(m+b)(a+b)(m+a)}}$$

Знак равенства достигается только тогда, когда $\frac{a}{m+b}=\frac{m}{a+b}=\frac{b}{m+a}$ (При знаке равно мы получаем минимальное значение f)

д-ть!

$$\frac{a}{m+b}=\frac{m}{a+b}=\frac{b}{m+a} \Rightarrow a=b=m.$$

Но если $a=b=m$, то $\frac{a}{m+b}+\frac{m}{a+b}+\frac{b}{m+a}=\frac{3}{2}$ – минимальное значение.

Получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{a}{m+b}+\frac{m}{a+b}+\frac{b}{m+a} \geq \frac{3}{2} \\ \frac{a}{m+b}+\frac{m}{a+b}+\frac{b}{m+a} \le \frac{3}{2} \text{ – по условию} \end{cases}$$

Но такое возможно только в случае равенства

$$\Rightarrow \frac{a}{m+b}+\frac{m}{a+b}+\frac{b}{m+a}=\frac{3}{2} \Rightarrow a=b=m$$

$a = b = m \Rightarrow x^3 = x\sqrt[3]{2020^4} = m$

$\Rightarrow x^2 = \sqrt[3]{2020^4} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2020^2}$

$m = x^3 = \left(\sqrt[3]{2020^2}\right)^3 = 2020^2 = 4080400$

Ответ: $m = 4080400$

X

№3.

$p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$. ; $n > 1$; $n \in \mathbb{Z}$.

$p(t) = t^{n-1}\left(t + 5 + \frac{3}{t^{n-1}}\right) = t^{n-1}\left(t + 5 + 3t^{1-n}\right)$

Чтобы степень была положительной:

$1 - n > 0$?? $\Rightarrow n < 1$, что противоречит условию !!

$\Rightarrow p(t)$ нельзя разложить на многочлены с положительными степенями, ведь всегда будет (t^{1-n}) степень которого < 0 (т.к. $n > 1$)

Ответ: нет, нельзя