Место для скобы

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

003978

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	2
3.	Класс	11
4.	Фамилия	РУДЫК
	Имя	ЯРОСЛАВ
	Отчество	ЮРЬЕВИЧ
5.	Дата рождения	Число: 13; Месяц: 09; Год: 2003
6.	Страна	Россия
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	Томская обл.
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Томск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ Лицей при ТПУ

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Руд

Место для скобы

Шифр 003978

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
29б	5.04.21	Гендрина И.Ю.	[подпись]

№1

$\frac{1}{x} - \overset{1ое}{\frac{1}{x^2+2020}}$; $x - \frac{1}{x}$; $\overset{3ее}{\frac{1}{x^2+2020}} - \frac{1}{x}$

Предположим, что существует

тогда $x - \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \frac{x^2-1}{x} \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow (x^2-1) \vdots x$

$(x-1)(x+1) \vdots x$, ~~где $(x-1)$ и $(x+1)$ – взаимно~~ см. примечание (*)

$\left[\begin{array}{l} \cancel{x-1 \vdots x} \\ \cancel{x+1 \vdots x} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \vdots x \\ x+1 \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 \vdots x \\ x-1 \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{array}\right.$ $\cancel{x}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-\frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \\ x+1 \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} 1+\frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \\ x-1 \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{array}\right.$

Тогда ед. возможный x, это $x = \pm 1$ (при ~~$x<1$~~ ~~$0<x<1$~~ $|x|<1$ не будет выполняться второе усл. в системах; при $|x|>1$ – не удовл первой сист.)

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{x^2+2020-x}{x(x^2+2020)} \in \mathbb{Z} \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -1 \\ \frac{x^2+2020-x}{x(x^2+2020)} \in \mathbb{Z} \end{cases}$ (проверять 3ее нет смысла т.к. „3ее" = –„1ое")

$\frac{2020}{2021} \notin \mathbb{Z}$ или $-\frac{2022}{2021} \notin \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = \pm 1$ не подх $\Rightarrow$ предположение неверно

Ответ: не существует

* Если $(x-1)(x+1) \vdots x$, то либо $x-1 \vdots x$ либо $x+1 \vdots x$ т.к. если бы ни то ни то не делилось, то произв тоже не будет делится, т.к. $(x-1)$ и $(x+1)$ отличаются на 2

7б

1	2	3	4	5
7	7	7	7	1

№2

$\sin x + \sin^3 x + 2021 \cdot \sin^5 x = \cos 2x + \cos^3(2x) + 2021(\cos^5(2x))$

т.к. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin x + \sin^3 x + 2021 \cdot \sin^5 x = (1 - 2\sin^2 x) + (1 - 2\sin^2 x)^3 + 2021(1 - 2\sin^2 x)^5$

~~Функц~~ $\sin x \overset{\text{об}}{=} t$, $|t| \le 1$

$t + t^3 + 2021t^5 = (1 - 2t^2) + (1 - 2t^2)^3 + 2021(1 - 2t^2)^5$

Функция представлена в виде $f(t_1) = f(t_2)$, где

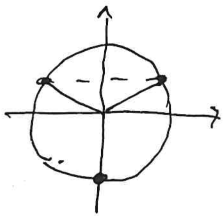
$f(t) = t + t^3 + 2021t^5$

Причем $f(t)$ монотонно возрастает т.к. $f'(t) = 1 + 3t^2 + 5 \cdot 2021 \cdot t^4 \ge 1$

$\Rightarrow$ исходное ур-е равносильно $t_1 = t_2$

$t = 1 - 2t^2$

$2t^2 + t - 1 = 0$



$\left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$ ~~$x\in$~~

7 б

$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right.$ Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right.$, $n \in \mathbb{Z}$

№4

$$\frac{x^3}{k + \sqrt[3]{2021^4} \cdot x} + \frac{\sqrt[3]{2021^4} \cdot x}{k + x^3} \le \frac{3}{2} - \frac{k}{x(x^2 + \sqrt[3]{2021^4})}$$

7 б

$x^3 \overset{\text{об}}{=} a$
$k \overset{\text{об}}{=} b$; $a, b, c > 0$ из усл
$\sqrt[3]{2021^4} \cdot x \overset{\text{об}}{=} c$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} \le \frac{3}{2}$$

$2(a(a+b)(a+c) + c(b+c)(a+c) + b(b+c)(a+b)) \le 3(b+c)(a+b)(a+c)$

$2(a^3 + b^3 + c^3) + \cancel{6abc} + 2ca^2 + 2c^2a + 2a^2b + 2ab^2 + 2cb^2 + 2c^2b - 3ab^2 - 3cb^2 - 3ac^2 - 3c^2b - 3ca^2 - \cancel{6abc} - 3a^2b \le 0$

Место для скобы

Шифр 003978

$2(a^3+b^3+c^3) - ca^2 - c^2a - a^2b - ab^2 - cb^2 - c^2b \le 0$

$a(a^2-2ca+c^2) + 2ca^2 - c^2a - ca^2 - c^2a - a^2b - ab^2 - cb^2 - c^2b \cancel{2a} + a^3+2b^3+2c^3 \le 0$

$a(a-c)^2 + (ca^2 - 2c^2a + c^3) - a^2b - ab^2 - cb^2 - c^2b + a^3+2b^3+c^3 \le 0$

$\cancel{a(a+c}$ $a(a-c)^2 + c(a-c)^2 + b(b^2-2ab+a^2) + 2ab^2 - a^2b -$

$- a^2b - ab^2 - cb^2 - c^2b \cancel{2a} + a^3+b^3+c^3 \le 0$

$a(a-c)^2 + c(a-c)^2 + b(b-a)^2 + a(b^2-2ab+a^2) - cb^2 - c^2b + b^3+c^3 \le 0$

$\cancel{a(a+}$ $a(a-c)^2 + c(a-c)^2 + b(b-a)^2 + a(b-a)^2 + b(b^2-2cb+c^2) \underline{+2cb^2} -$

$- c^2b \underline{-cb^2} - c^2b + c^3 \le 0$

$a(a-c)^2 + c(a-c)^2 + b(b-a)^2 + a(b-a)^2 + b(b-c)^2 + c(c^2-2bc+b^2) \le 0$

$a(a-c)^2 + c(a-c)^2 + b(b-a)^2 + a(b-a)^2 + b(b-c)^2 + c(b-c)^2 \le 0$

$\underset{>0}{(a+c)}\underset{\geq 0}{(a-c)^2} + \underset{>0}{(b+a)}\underset{\geq 0}{(b-a)^2} + \underset{>0}{(b+c)}\underset{\geq 0}{(b-c)^2} \le 0$ (все выраж ≥ 0)

$\Rightarrow (a+c)(a-c)^2 + (b+a)(b-a)^2 + (b+c)(b-c)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=a \\ b=c \end{cases}$ $\begin{cases} x^3 = \sqrt[3]{2021^4}\cdot x \\ k = x^3 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x^2-\sqrt[3]{2021^4})=0 \\ k=x^3 \end{cases}$

т.к. $x>0$, то $x+\sqrt[3]{2021^2}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt[3]{2021^2}=0 \\ k=x^3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\sqrt[3]{2021^2} \\ k=2021^2 \end{cases}$

Ответ: $k=2021^2$

Место для скобы

Шифр

№3

(1) $p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$; $n > 1$; $n \in \mathbb{Z}$

Пусть $p(t)$ разложится на ~~(kx+b)·(k~~ $(t+b)(t^{n-1}+\ldots)$ ~~Нет~~ (линейная ф-ция умнож. на многочлен), где $b \in \mathbb{Z}$ из усл

Найдем это разложение, приравняв к нулю $p(t)$

$t^n + 5\cdot t^{n-1} + 3 = 0$

тогда корни этого уравнения $t \in \{\pm 3; \pm 1\}$ (каждый целый корень ур-е представим в виде $t = \frac{q}{k}$, где q – делитель свободного члена, k – делитель старшего коэф.), см примеч. (*))

1) $t = 1$

$1 + 5 + 3 \neq 0$

2) $t = -1$

$(-1)^n + 5\cdot(-1)^{n-1} + 3 = 0$

$(-1)^n - 5\cdot(-1)^n + 3 = 0$

$-4\cdot(-1)^n = -3$

$(-1)^n = \frac{3}{4}$

$n \in \varnothing$

3) $t = 3$

$3^n + 5\cdot 3^{n-1} + 3 = 0$

$3(\underbrace{3^{n-1} + 5\cdot 3^{n-2} + 1}_{0}) = 0$

$n \in \varnothing$

4) $t = -3$

$(-3)^n + 5\cdot(-3)^{n-1} + 3 = 0$

$(-3)^n + \frac{5\cdot(-3)^n}{-3} + 3 = 0$

$3t$ $t + \frac{5t}{-3} + 3 = 0$

~~$-3t + 15t$~~

$t - \frac{5t}{3} + 3 = 0$

$3t - 5t = -9$

$t = 4,5$

$(-3)^n = 4,5$

но $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$n \in \varnothing$

(*) Если корни нецелые, то коэффициент в разложении (b) так не будет нецелым, что противоречит усл задачи

$\Rightarrow p(t)$ нельзя разложить на линейную ф-цию и многочлен

7 б

Место для скобы

Шифр

Продолжение №3

② Пусть $p(t)$ разложили на на произведение ~~двух~~ многочлена с целыми коэф: ~~Тогда на прилож двух~~

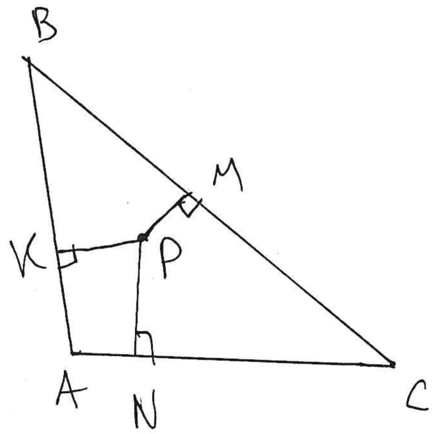
$(t^{d}+\ldots\pm1)(t^{n-d}+\ldots\pm3)$ — пример для двух

Очевидно, что свободные члены в полученных многочленах это ±3 и ±1, причем ±3 используется только 1 раз; „-1"- четное кол-во

тогда при раскрытии скобок обязательно получим $t^{d}\cdot(\pm3)$, где $d\neq n$, но в исх. функции ~~есть~~ ~~нет~~ есть только t^{n-1} $\Rightarrow$ $d=n-1$ $\Rightarrow$ возможно только разложение на 2 многочлена, где один линейный $(n-n+1=1)$, но в ① док-но, почему линейного быть не может $\Rightarrow$ $P(t)$ нельзя разложить на произведение многочленов с ц-ми коэф

Ответ: Невозможно

№5



$\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$ - минимально

$\Rightarrow\frac{BC}{PM}$ - минимально

$\frac{AC}{PN}$ - минимально

$\frac{AB}{PK}$ - минимально

$\Rightarrow PM>BC$

~~$AC>PN$~~ $PN>AC$

$PK>AB$

1 б