07564

Шифр

…ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

…ет	МАТЕМАТИКА
…нт	1.
	10
…ия	РОДИН
	ТИМОФЕЙ
…во	МИХАЙЛОВИЧ
…ождения	10 (Число) 03 (Месяц) 2006 (Год)
	Россия
… *(пр: Томская обл., …нградская область)*	Кемеровская обл.
…иципального образования *…, деревня, село, город)*	город
…нный пункт *(пр: Томск, …ово, Псков)*	Кемерово
… наименование …зательного учреждения, …ом Вы обучаетесь в … время	ФГКОУ „Кемеровское ПКУ"

…сие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail …ультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ________

Шифр 07564

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
16	26.03	Корякина Е.Е.	[illegible]

№1. $y^2(y-x+2)+y(x+4)+5x+7=0$. ← Выразим x через y.

$y^3-xy^2+2y^2-xy-4y+5x+7=0. \mid \cdot(-1)$

$-y^3+xy^2-2y^2+xy+4y-5x-7=0.$

1	2	3	4	5	Σ
4	0	5	7	0	16

$xy^2+xy-5x-y^3-2y^2+4y-7=0$

$x(y^2+y-5)-(y^3+2y^2-4y+7)=0.$

$x=\dfrac{y^3+2y^2-4y+7}{y^2+y-5}$

$$\begin{array}{r|l} y^3+2y^2-4y+7 & y^2+y-5 \\ \underline{y^3+y^2-5y} & y+1 \\ y^2+y+7 & \\ \underline{y^2+y-5} & \\ 12 & \end{array}$$

$x=y+1+\dfrac{12}{y^2+y-5}$

Так как $x\in\mathbb{Z}$ и $y\in\mathbb{Z}$ (по усл.), то знаменатель дроби (y^2+y-5) должен быть равен делителю числа 12, чтобы вся дробь была ~~равна~~ целому числу.

Делители числа 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Рассмотрим все допустимые варианты.

① $y^2+y-5=1$
$y^2+y-6=0$
$D=1+4\cdot6=25$
$y_1=\frac{-1+5}{2}=2$
$y_2=\frac{-1-5}{2}=-3$

② $y^2+y-5=2$
$y^2+y-7=0$
$D=1+4\cdot7=29$
$y_3,y_4\notin\mathbb{Z}$, т.к. дискриминант не явл-ся квадратом целого числа.

③ $y^2+y-5=3$
$y^2+y-8=0$
$D=1+4\cdot8=33$
$y_5,y_6\notin\mathbb{Z}$ —"—

④ $y^2+y-5=4$
$y^2+y-9=0$
$D=1+4\cdot9=37$
$y_7,y_8\notin\mathbb{Z}$ —"—

⑤ $y^2+y-5=6$
$y^2+y-11=0$
$D=1+4\cdot11=45$
$y_9,y_{10}\notin\mathbb{Z}$ —"—

⑥ $y^2+y-5=12$
$y^2+y-17=0$
$D=1+4\cdot17=69$
$y_{11},y_{12}\notin\mathbb{Z}$ —"—

$x_1=2+1+\dfrac{12}{4+2-5}=15.$

$x_2=-3+1+\dfrac{12}{9-3-5}=10.$

Ответ: $(15;2),(10;-3)$.

Шифр 07564

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

№4

$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$. , Д-ть: $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

По Теореме Виета:

$\begin{cases} x_1 x_2 = -\frac{1}{2p^2} \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$

Выразим сумму четвертых степеней корней через сумму и разность корней:

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-p)^2 - 2\left(-\frac{1}{2p^2}\right) = p^2 + \frac{1}{p^2}$
- $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)^2 - \frac{2}{4p^4} =$

$= p^4 + 2 + \frac{1}{p^4} - \frac{1}{2p^4} = p^4 + \frac{1}{2p^4} + 2.$

Подставим полученное выражение относительно p в искомое неравенство:

$p^4 + \frac{1}{2p^4} + 2 \geq 2 + \sqrt{2}$

$p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2}$. – верно, $\forall p$

Отдельно оценим выражение $p^4 + \frac{1}{2p^4}$ с помощью неравенства Коши:

$\frac{p^4 + \frac{1}{2p^4}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \cancel{p^4} \cdot \cancel{\frac{1}{p^4}}}$

$p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}}$

$p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}$

$p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2}$

Получаем, $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$

ч.т.д.

+

№3.

$$\frac{a+b-c}{2c}+\frac{b+c-a}{2a}+\frac{a+c-b}{2b}\geqslant\frac{3}{2}$$

$$\frac{a+b}{2c}-\frac{1}{2}+\frac{b+c}{2a}-\frac{1}{2}+\frac{a+c}{2b}-\frac{1}{2}\geqslant\frac{3}{2}$$

$$\frac{a+b}{2c}^{\backslash ab}+\frac{b+c}{2a}^{\backslash bc}+\frac{a+c}{2b}^{\backslash ac}\geqslant 3.$$

$$\frac{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2}{2abc}\geqslant 3.$$

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2-6abc\geqslant 0.$$

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2+3abc=(ab+bc+ac)(a+b+c)$$

$$(ab+bc+ac)(a+b+c)-9abc\geqslant 0.$$

$$\frac{(ab+bc+ac)(a+b+c)}{abc}\geqslant 9.$$

$$\frac{ab+bc+ac}{ab}\cdot\frac{a+b+c}{c}\geqslant 9.$$

$$\left(1+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{c}+1\right)\geqslant 9.$$

$$\frac{a+b}{c}+1+\frac{a+b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a+b}{b}+\frac{c}{b}\geqslant 9.$$

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1+1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}\geqslant 9.$$

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 6.$$

Известно, что для любых положительных чисел, стоящих в числителях и знаменателях двух взаимно обратных ~~дробей~~ верно, что сумма этих двух взаимно обратных чисел будет всегда не меньше 2. $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2,\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geqslant 2,\ \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 2\right)$. Сложив все три неравенства, получаем неравенство выше. ч.т.д.

Место для скобы

Шифр

№2. $\begin{cases} \cos 3x = A \cdot \sin 2x \\ \sin 3x = B \cdot \cos 4x \end{cases}$

Выразим из каждого равенства A и B:

$A = \frac{\cos 3x}{\sin 2x}$

$B = \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$

Число B по условию – рациональное.

В числителе дроби $\sin 3x$, значит по определению рационального числа, $\sin 3x$ – рациональное ?

ч.т.д.