МАТЕМАТИКА (9 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Докажите, что число $3^{4046}-3^{2023}\cdot 2^{1012}+2^{2024}$ является составным.

Доказательство:

$$3^{4046}-3^{2023}\cdot 2^{1012}+2^{2024}=(3^{2023})^2+2\cdot 3^{2023}\cdot 2^{1012}+(2^{1012})^2-3\cdot 3^{2023}\cdot 2^{1012}=$$
$$=(3^{2023}+2^{1012})^2-3^{2024}\cdot 2^{1012}=(3^{2023}+2^{1012}-3^{1012}\cdot 2^{506})(3^{2023}+2^{1012}-3^{1012}\cdot 2^{506}).$$

2. Найдите все целые числа k, при которых уравнение

$$x^2+kx+k=0$$

имеет целый корень.

Ответ: 0 и 4.

Решение: Пусть x_1 и x_2- корни данного уравнения. По теореме Виета $x_1+x_2=-k,\ \ x_1x_2=k$. Если один из корней целый, то и другой целый. Сложим эти уравнения и прибавим 1 к обеим частям уравнения:

$$x_1+x_2+\ x_1x_2+1=1.$$

Следовательно, $(x_1+1)(x_2+1)=1$. Так как x_1+1, x_2+1- целые, то возможны 2 случая:

1) $\begin{cases}x_1+1=1,\\ x_2+1=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0,\\ x_2=0,\end{cases}\Rightarrow k=0$ 2) $\begin{cases}x_1+1=-1,\\ x_2+1=-1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2,\\ x_2=-2,\end{cases}\Rightarrow k=4.$

3. Имеется два бруска сплавов золота с серебром с различным процентным содержанием золота в них и брусок серебра. Если сплавить вместе два бруска сплавов, то получит сплав, содержащий 30% золота, а если сплавить любой из двух брусков сплавов с бруском серебра, то получится сплав, содержащий 20% золота. Сколько процентов золота будет содержать сплав, если сплавить вместе все три бруска?

Ответ: 24%.

Решение: Примем массу бруска с серебром за одну условную единицу.
Пусть x_1 и y_1- массы золота и серебра в первом бруске соответственно, x_2 и y_2- массы золота и серебра во втором бруске соответственно. Составим следующую систему:

$$\begin{cases}x_1=0{,}2(x_1+y_1+1),\\ x_2=0{,}2(x_2+y_2+1),\\ x_1+x_2=0{,}3(x_1+y_1+x_2+y_2).\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0{,}2(x_1+y_1+x_2+y_2+2),\\ x_1+x_2=0{,}3(x_1+y_1+x_2+y_2).\end{cases}\Rightarrow$$

$$x_1+y_1+x_2+y_2=4\ \Rightarrow\ x_1+x_2=0{,}3\cdot 4=1{,}2.$$

Найдем сколько процентов золота будет содержать сплав, если сплавить вместе все три бруска:

$$\frac{x_1+x_2}{x_1+y_1+x_2+y_2+1}\cdot 100\%=\frac{1{,}2}{4+1}\cdot 100\%=24\%.$$

4. Докажите, что для всех положительных чисел $a,\ b,\ c$ выполняется неравенство

$$\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{c+1}+\frac{c+1}{a+1}\le\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

Доказательство: После элементарных преобразований исходное неравенство примет вид:

$$\frac{b-a}{(b+1)b}+\frac{c-b}{(c+1)c}+\frac{a-c}{(a+1)a}\le 0\,.$$

Так как переменные входят в неравенство симметрично, то можно считать , что $a-$наибольшее число.

1. Если $b\ge c$, то

$$\frac{a-b}{a(a+1)}\le\frac{a-b}{b(b+1)}\,,\quad\frac{b-c}{a(a+1)}\le\frac{b-c}{c(c+1)}\,.$$

Складывая эти неравенства, получим

$$\frac{a-c}{a(a+1)} \le \frac{a-b}{b(b+1)} + \frac{b-c}{c(c+1)}.$$

Таким образом, неравенство

$$\frac{b-a}{b(b+1)} + \frac{c-b}{c(c+1)} + \frac{a-c}{a(a+1)} \le 0$$

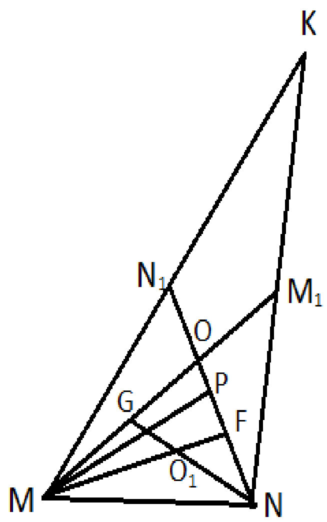
является верным.

2. Если $b < c,$ то аналогично рассматриваем неравенства

$$\frac{c-b}{c(c+1)} \le \frac{c-b}{b(b+1)}, \quad \frac{a-c}{a(a+1)} \le \frac{a-c}{b(b+1)}.$$

Отметим, что при $a = b = c$ исходное неравенство сразу превращается в верное неравенство.

5. В треугольнике MNK медианы MM_1 и NN_1 пересекаются в точке $O.$ Докажите, что $MK + NK > 3MN$, если угол MON не является тупым углом.



Доказательство: Проведем в треугольнике MON медианы MF и $NG.$ Пусть O_1 − точка пересечения медиан MF и $NG.$

Тогда $OF = \frac{1}{2}ON = ON_1.$

Если угол MON является прямым углом, то прямоугольные треугольники MOF и MON_1 равны по двум катетам $\Rightarrow$ $MF = MN_1.$

Если угол MON является острым углом, то основание перпендикуляра P, опущенного из вершины M на прямую NN_1 лежит на луче $ON,$ и значит, $MF < MN_1$ (в работе должно быть строгое доказательство этого неравенства, например, через теорему Пифагора, примененной к двум треугольникам MPF и MPN_1).

Таким образом, имеем $MF \le MN_1.$ Тогда $MO_1 = \frac{2}{3}MF \le \frac{2}{3}MN_1 = \frac{1}{3}MK.$ Аналогично можно доказать, что $NO_1 \le \frac{1}{3}NK.$ Применяя неравенство треугольника для треугольника $MO_1N,$ получим

$$MK + MN \ge 3(MO_1 + NO_1) \ge 3MN.$$

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.