МАТЕМАТИКА (8 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Докажите, что не существует таких целых чисел n и m, что

$$n^3 + 6n^2 + 5n = 27m^3 + 9m^2 + 9m + 1 .$$

Доказательство: В равенстве

$$n^3 + 6n^2 + 5n = n(n+1)(n+2) + 3n(n+1) = 3(9m^3 + 3m^2 + 3m) + 1$$

левая часть делится на 3, а правая часть нет.

2. Найдите все числа x и y, для которых справедливо равенство:

$$2x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Ответ: $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$**.**

Решение: Перепишем уравнение в виде

$$2x^2 - (2y+2)x + 5y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Найдем его дискриминант $D = -(3y-1)^2$.

При $y \neq \frac{1}{3}$ решений нет, при $y = \frac{1}{3}$ при $x = \frac{2}{3}$.

3. Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов А и В и проехали весь путь между ними с неизменными скоростями. Известно, что один из автомобилей, назовем его первым автомобилем, на остаток пути после встречи с другим автомобилем, назовем его вторым автомобилем, потратил на 18 минут больше, чем на путь до встречи, а второй автомобиль на остаток пути после встречи с первым автомобилем потратил на 12 минут меньше, чем на путь до встречи. Через сколько минут после начала движения из пунктов А и В автомобили встретились?

Ответ: через 36 минут.

Решение: Пусть точка С – точка встречи двух автомобилей;

t_{AC} , t_{CB} – время в минутах, потраченное первым автомобилем до встречи и после встречи со вторым автомобилем;

t_{BC} , t_{CA} – время в минутах, потраченное вторым автомобилем до встречи и после встречи с первым автомобилем;

v_1 , v_2 – скорости первого и второго автомобиля соответственно.

Тогда $\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_{CA}}{t_{AC}}$, $\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_{BC}}{t_{CB}}$. Следовательно, $\frac{t_{CA}}{t_{AC}} = \frac{t_{BC}}{t_{CB}}$.

Положим $x = t_{AC}$, тогда $t_{BC} = x$, $t_{CA} = x - 12$, $t_{CB} = x + 18$. Тогда получим равенство $\frac{x-12}{x} = \frac{x}{x+18}$.
Отсюда следует, что $x^2 = (x-12)(x+18) \Leftrightarrow x^2 = x^2 + 6x - 216 \Leftrightarrow 6x = 216 \Leftrightarrow x = 36$.

4. Докажите, что для всех $a > b > c > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{b-a}{b(b+1)} + \frac{c-b}{c(c+1)} + \frac{a-c}{a(a+1)} \le 0\,.$$

Доказательство: Так как $a > b > c > 0$, то

$$\frac{a-b}{a(a+1)} \le \frac{a-b}{b(b+1)}\,, \quad \frac{b-c}{a(a+1)} \le \frac{b-c}{c(c+1)}\,.$$

Складывая эти неравенства, получим

$$\frac{a-c}{a(a+1)} \le \frac{a-b}{b(b+1)} + \frac{b-c}{c(c+1)}\,.$$

Таким образом, неравенство

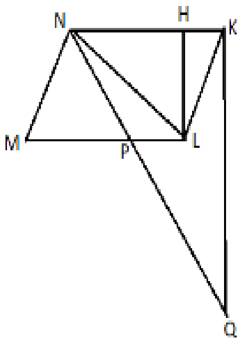
$$\frac{b-a}{b(b+1)} + \frac{c-b}{c(c+1)} + \frac{a-c}{a(a+1)} \le 0$$

является верным для всех $a > b > c > 0$.

5. В параллелограмме $MNKL$ с тупым углом N на стороне ML выбрана точка P такая, что $PN = MN$. На продолжении NP за точку P выбрана точка Q такая, что $\angle QKN = 90°$. Оказалось, что $\angle KQN = \angle KNL$. Найдите NL, если $ML = 15$, а одна из высот параллелограмма $MNKL$ равна 6.

Ответ: NL=6 или $NL = 6\sqrt{5}$.

Решение:



Так как $\angle NKL = \angle NMP = \angle NPM = \angle PNK$, то $\angle LKN + \angle KNL = \angle PNK + \angle KQN = 90°$. $\Rightarrow \Delta NLK$ − прямоугольный. Возможны 2 случая, так как в задаче не сказано о какой высоте идет речь.

1) NL=6 ⇒ задача решена.

2)LH=6 $\Rightarrow$ $LH \cdot NK = 6 \cdot 15 = NL \cdot LK$, $NL^2 + LK^2 = 225\ (NL > LK) \Rightarrow NL = 6\sqrt{5}, LK = 3\sqrt{5} \Rightarrow NL = 6\sqrt{5} \Rightarrow$ задача решена.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.