МАТЕМАТИКА (10 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Докажите, что число $3^{4046} - 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2024}$ является составным.

Доказательство:

$$3^{4046} - 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2024} = (3^{2023})^2 + 2 \cdot 3^{2023} \cdot 5^{1012} + (5^{1012})^2 - 3 \cdot 3^{2023} \cdot 5^{1012} =$$
$$= (3^{2023} + 5^{1012})^2 - 3^{2024} \cdot 5^{1012} = (3^{2023} + 5^{1012} - 3^{1012} \cdot 5^{506})(3^{2023} + 5^{1012} - 3^{1012} \cdot 5^{506}).$$

2. Решите уравнение $t^4 - 2\sqrt{13} \cdot t^2 + t + 13 - \sqrt{13} = 0$.

ОТВЕТ: $\left\{\frac{-1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{13}}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{-3+4\sqrt{13}}}{2}\right\}$

Решение. Пусть $a = \sqrt{13}$, тогда $a^2 - (2t^2+1)a + t^4 + t = 0$.

Найдем $D = (2t^2+1)^2 - 4(t^4+t) = 4t^2 - 4t + 1 = (2t-1)^2$.

Вычислим $a_{1,2} = \frac{(2t^2+1) \pm (2t-1)}{2} \Rightarrow a_1 = t^2 + t, \; a_2 = t^2 - t + 1$.

1) $t^2 + t = \sqrt{13} \Rightarrow \quad t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{13}}}{2}$.

2) $t^2 - t + 1 = \sqrt{13} \Rightarrow \quad t_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{-3+4\sqrt{13}}}{2}$.

3. Имеется два бруска сплавов золота с серебром с различным процентным содержанием золота в них и брусок серебра. Если сплавить вместе два бруска сплавов, то получит сплав, содержащий 30% золота, а если сплавить любой из двух брусков сплавов с бруском серебра, то получится сплав, содержащий 20% золота. Сколько процентов золота будет содержать сплав, если сплавить вместе все три бруска?

Ответ: 24%.

Решение: Примем массу бруска с серебром за одну условную единицу.

Пусть x_1 и y_1 – массы золота и серебра в первом бруске соответственно, x_2 и y_2 – массы золота и серебра во втором бруске соответственно. Составим следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}2(x_1 + y_1 + 1), \\ x_2 = 0{,}2(x_2 + y_2 + 1), \\ x_1 + x_2 = 0{,}3(x_1 + y_1 + x_2 + y_2). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0{,}2(x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + 2), \\ x_1 + x_2 = 0{,}3(x_1 + y_1 + x_2 + y_2). \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 4 \;\Rightarrow\; x_1 + x_2 = 0{,}3 \cdot 4 = 1{,}2.$$

Найдемсколько процентов золота будет содержать сплав, если сплавить вместе все три бруска:

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + 1} \cdot 100\% = \frac{1{,}2}{4+1} \cdot 100\% = 24\%.$$

4. Даны два числа a и b, которые удовлетворяют условиям**:**

1) $0 < a < \frac{1}{2}, 0 < b < \frac{1}{2}$;

2) $b^2 - a^2 > b - a$.

Докажите, что эти числа a и b удовлетворяют и неравенству $b^3 - a^3 > b - a$.

Доказательство:

Введем функцию $f(t) = t^2 - t$ и $g(t) = t^3 - t$, где $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

При $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ $f'(t) = 2t - 1 < 0$ и $g'(t) = 3t^2 - 1 < 0 \Longrightarrow f(t)$ и $g(t)$ убывают на этом промежутке.

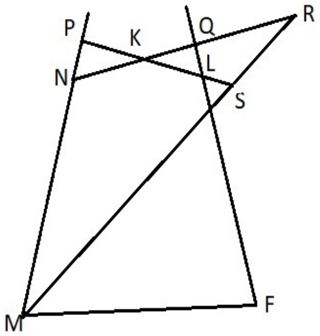
Перепишем неравенство $b^2 - a^2 > b - a$ в виде

$$f(b) = b^2 - b > a^2 - a = f(a) \Longrightarrow b < a.$$

Тогда $g(b) = b^3 - b > a^3 - a = g(a)$, что и требовалось доказать.

5. В выпуклом пятиугольнике $MNKLF$сторона MN перпендикулярна стороне KL, а сторона NK перпендикулярна стороне LF. Докажите, что $NK + KL < 1$, если $MN = MF = LF = 1$.

Доказательство:



Продолжим стороны MN и KL, NK и LF до пересечения в точках P и Q соответственно (в работе должно быть доказано на основе перпендикулярности сторон).

Пусть $\angle NMF = \alpha$, $\angle LFM = \beta$. В четырехугольнике $MNQF$ $\angle N > 90°, \angle Q = 90° \Rightarrow \alpha + \beta < 180° \Rightarrow$ один из углов меньше 90°. Без ограничения общности рассуждений будем считать, что $\angle\alpha < 90°$. Отложим на луче NK отрезок NR единичной длины.

В равнобедренном треугольнике MNR $\angle NMR = \frac{\alpha+\beta-90°}{2}$.

В равнобедренном треугольнике MFL $\angle LMF = \frac{180°-\beta}{2}$.

Следовательно, $\angle NMR + \angle LMF = \frac{90°+\alpha}{2} > \alpha \Rightarrow L$ лежит внутри треугольника MNR .

Продолжим KL до пресечения с MR в точке S. В треугольнике KRS угол $KRS -$ острый, а угол RSK $-$ тупой $\Rightarrow KS < KR \Rightarrow NK + KL < NK + KS < NK + KR = NR = 1$.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.