08116

Шифр

ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

ет	математика
нт	1
	9
ия	Речкина
	Виктория
тво	Сергеевна
рождения	13 (Число) 06 (Месяц) 2007 (Год)
а	Россия
н *(пр: Томская обл., инградская область)*	Алтайский край
ниципального образования *п, деревня, село, город)*	город
енный пункт *(пр: Томск, рово, Псков)*	Новоалтайск
е наименование овательного учреждения, ром Вы обучаетесь в е время	МБОУ „Гимназия №166"

асие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail зультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ____________

Шифр **08116**

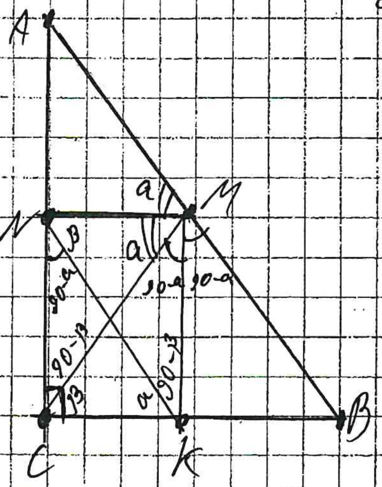
Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
20	28.03	Корякина Е.Е.	[signature]

Задача №5.

1	2	3	4	5	Σ
0	3	7	5	5	20

рис:



Дано по условию:

$\angle ACB = 90^\circ$

MK – бис $\angle CMB$

MN – бис $\angle AMC$

$NK = CM$

Доказать: ~~...~~ $AM = MB$.

Решение:

1) Обозначим $\angle AMN = a$, тогда

$\angle AMC = 2a \Rightarrow \angle CMB = 180 - 2a$ (смежные) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CMK = \angle KMB = \dfrac{\angle CMB}{2} = \dfrac{180-2a}{2} = 90 - a$

2) $\left.\begin{array}{l}\angle NMC = a \\ \angle CMK = 90 - a\end{array}\right\} \Rightarrow \angle NMK = 90^\circ$

3) $\angle NMK + \angle NCK = 90 + 90 = 180^\circ \Rightarrow NMKC$ – вписанный в окружность четырехугольник

4) Пусть $\angle MNK = \beta \Rightarrow \angle MKN = 90 - \beta$ (по сумме $\angle$ в $\triangle NMK$)

5) Т.к. $MKCN$ – вписанный, то $\angle CNK = \angle CMK \; (= 90 - a)$, поскольку они опираются на одну хорду $CK \Rightarrow$ Опираются на одну дугу CK

скобы

Шифр 08116

Продолжение задания №5.

6) Аналогично, MK (N - высоты) => $\angle MNK = \angle MCK$, из-за дуги MK

7) По сумме $\angle$ в $\triangle$ CNK => $\angle NKC = a$;

$\left.\begin{array}{l}\angle NCK = 90 \\ \angle MCK = \beta\end{array}\right| \Rightarrow \angle NCM = 90 - \beta$

8) T. sin для $\triangle$ NCK:

$\frac{CK}{\sin(90-a)} = \frac{NK}{\sin 90}$

T. sin для $\triangle$ CMK

$\frac{CK}{\sin(90-a)} = \frac{CM}{\sin(90-\beta+a)}$

~~По усл., CM = NK~~

$\Rightarrow \frac{CK}{\sin(90-a)} = \frac{NK}{\sin 90} = \frac{CM}{\sin(90-\beta+a)}$

NK = CM (по условию)

$\Downarrow$

$\frac{NK}{\sin 90} = \frac{NK}{\sin(90-\beta+a)}$

$\Downarrow$

$\sin(90) = \sin(90-\beta+a)$

$\Downarrow$

$90 = 90 - \beta + a$

$\Downarrow$

$\beta = a$ (далее буду заменять β на a)

9) По сумме углов в $\triangle$ ACM:

$\left.\begin{array}{l}\angle CAM = 180 - 90 + \beta - 2a = 90 + \beta - 2a = 90 - a \\ \angle ACM = 90 - \beta = 90 - a\end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AMC$ - равнобедренный => AM = MC

10) По сумме углов в $\triangle$ CMB

$\left.\begin{array}{l}\angle MBC = 180 - 90 + a - 90 + a - \beta = 2a - \beta = a \\ \angle MCB = \beta = a\end{array}\right| \Rightarrow \triangle MCB$ - равнобедренный $\Downarrow$ CM = MB

a? 2?

Продолжение задачи №5

11) Из 9 $\Rightarrow AM = MC$ $\Big\}\Rightarrow$ $\underline{MC = AM = MB}$ что и требовалось доказать.
Из 10 $\Rightarrow CM = MB$

Задача №7.

0) Нужно доказать:

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) = p_2^2 - p_1^2$$

1) Запишем теорему, обратную теореме Виета для обоих многочленов, данных в задаче:

$x^2 + p_1 x + 1 = 0$ и $x^2 + p_2 x + 1 = 0$

$x_1 + x_2 = -p_1$ $\qquad x_3 + x_4 = -p_2$

$x_1 x_2 = 1$ $\qquad x_3 x_4 = 1$

2) ~~Из пункта~~ Используя выведенное в пункте 1, запишем:

$$p_2^2 - p_1^2 = (-(x_3 + x_4))^2 - (-(x_1 + x_2))^2 = (x_3 + x_4)^2 - (x_1 + x_2)^2 =$$

$$= x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 =$$

$\left.\begin{array}{l} x_3 x_4 = 1 \\ x_1 x_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow p_2^2 - p_1^2 = x_3^2 + 2 + x_4^2 - x_1^2 - \cancel{2} - x_2^2 =$
$= x_3^2 + x_4^2 - x_1^2 - x_2^2.$

~~3) Если выражение Рассмотрим выражение данное в~~

3) ~~Если в~~ Рассмотрим выражение данное в задаче: (учитывая $x_1x_2 = 1$; $x_3x_4 = 1$)

$$p_2^2 - p_1^2 = (x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) =$$

$$\cancel{= (1 + x_3x_4)} = \cancel{(1 + x} = (1 - x_3x_1 - x_3x_2 + x_3^2)(1 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_4^2) =$$

Место для скобы

Шифр 08116

Продолжение задачи № 5.

$= 1 + x_1x_4 + x_4x_2 + x_4^2 - x_3x_1 - x_3x_4x_1^2 - x_3x_1x_4x_2 - x_3x_1x_4^2 -$

$- x_3x_2 - x_3x_2x_1x_4 - x_2^2x_3x_4 - x_3x_2x_4^2 + x_1^2 + x_2^2x_1x_4 + x_1^2x_4x_2 +$

$+ x_3^2x_4^2 = 1 + x_3x_4 + x_2x_4 + x_4 - x_1x_3 - x_1^2 - 1 - x_1x_4 - x_3x_2 -$

$- 1 - x_2^2 - x_2x_4 + x_3^2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 1 =$

$= x_3^2 + x_4^2 - x_1^2 - x_2^2$

4) Все выкладки, проделанные в пункте 3 можно провести в обратном порядке. Учитывая, выведенное в пункте 2 верно, для любых многочленов (ограничений нет). Следовательно можно продолжить рассуждения пункта 2 обратными ходами пункта 3, и получить спрашиваемое в задаче условие. ~~Значит~~, Значит, условие доказано.

Задача № 2. ~~Ответ: Нет.~~

1) Число 2025 ⋮ 5, следовательно n^{2025} ⋮ 5, где $n \in \mathbb{Z}$

2) Рассмотрим остатки при делении на 5 степеней единицы, двойки, тройки, четвёрки и пятёрки.

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	3	1	2	4	3	1
3	4	2	1	3	4	2	1
4	1	4	1	4	1	4	1
0	0	0	0	0	0	0	0

Заметим, что все остатки зациклились, и по определению следующего значения остатка n+1, если известно значение остатка n, понятно, что зацикливаться они далее будут всегда.

Примечание: Определение остатков степени n+1 происходит домножением остатка степени n и вычитанием 5k до неотрицательного остатка ≥ 0

скобы

Шифр 8116

Продолжение задачи №2.

~~2)~~ ~~1~~ т.е. у степеней двойки длина цикла
~~2)~~ ~~т.е~~ равна 4, точно так и у степеней 3.
У степеней единицы и пятёрки (нуля) длина цикла
равна 1. У степеней ~~4~~ четверки длина цикла равна 2.

3) Рассмотрим ~~четыре~~ пятёрок подряд идущих $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+4}$. Для определённости, будем считать, что $n = 1 + 4k$. Рассмотрим остатки при делении на 5 этих значений x_i, где i – одно из переменных ~~x_n~~ (работаем по одному основанию):

$x_n \underset{5}{\equiv} 1 + 0 + 4 + 3 + 2 \underset{5}{\equiv} 0$ ~~(пусть~~ $(n = 1 + 4k)$

$x_{n+1} \underset{5}{\equiv} 1 + 1 + 4 + 4 + 0 \underset{5}{\equiv} 0$ $(n+1 = 2 + 4k)$

$x_{n+2} \underset{5}{\equiv} 1 + 0 + 4 + 2 + 3 \underset{5}{\equiv} 0$ $(n+2 = 3 + 4k)$

$x_{n+3} \underset{5}{\equiv} 1 + 0 + 1 + 1 + 1 \underset{5}{\equiv} 4$ $(n+3 = 4(k+1))$

$x_{n+4} \underset{5}{\equiv} 1 + 0 + 4 + 3 + 2 \equiv 0$ $(n+4 = 4(k+1) + 1)$

x_n и x_{n+4} – имеют равные слагаемые. Значит, последовательность остатков x_i зацикливается (следует из циклов в таблице). ~~Зн~~ Получаем, что каждый четвёртый x_n не делится на 5 (~~при~~ ~~n~~ т.е. у этого x_n, $n = 4k$). Следовательно никакие 5 подряд идущих чисел не могут делиться на 2025.

страница

скобы

Шифр 8116

~~Задача №3~~

Продолжение задачи №2

Примечание: Все данные для 3-его пункта следуют из таблицы, сделанной ранее. Эта таблица посчитана правильно. Пример: $2 \underset{5}{\equiv} 2$; $2^2 \underset{5}{\equiv} 4$; $2^3 \underset{5}{\equiv} 8 \underset{5}{\equiv} 3$; $2^4 \underset{5}{\equiv} 16 \underset{5}{\equiv} 1$ и т.д.

Ответ: Нет.

Задача №3.

0) Нужно доказать: $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \le 3(a+b+c)$

~~1) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \le 3(a+b+c)$~~

~~1) Преобразуем~~

1) Предположим противное, т.е. $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 > 3(a+b+c)$, тогда: $a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac} > 3(a+b+c)$

$\Updownarrow$

$2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac} > 2(a+b+c)$

$\Updownarrow$

$(a-2\sqrt{ab}+b)+(a-2\sqrt{ac}+c)+(b-2\sqrt{bc}+c) < 0$

$\Updownarrow$

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 < 0$

~~что~~ Замечаем противоречие, ведь выходит сумма трёх квадратов, а любой квадрат - есть квадратичная функция, следовательно, $y^2 \ge 0$, где y - любая функция.

Предположение неверно, следовательно, $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \le 3(a+b+c)$

Задача №1

$2y^2 - xy - x^2 + 2y + 7x - 84 = 0$

~~$2y(y+1) - x($~~

~~Будем находить ...~~

1) Пусть x - const, а y - переменная

$2y^2 + (2-x)y + (7x - 84 - x^2) = 0$

$D = (2-x)^2 - 8(-x^2+7x-84) = 9x^2 - 60x + 676$

Ур-ние $9x^2 - 60x + 676$ имеет ~~$D = 3600 - 4\cdot 2\cdot 676$~~

$D = 3600 - 4\cdot 9\cdot 676 < 0$, значит, отрицат. нет x в данном ур-нии и не раскладывается на скобки

$y_1 = \frac{(x-2)+\sqrt{9x^2-60x+676}}{4}$

$y_2 = \frac{(x-2)-\sqrt{9x^2-60x+676}}{4}$

y_1 и y_2 явно не могут принадлежать натуральным.

Следовательно решений для y нет, а, значит и для x

2) Проверим, уравнение по x-переменная

$x^2 + (y-7)x - 2y + 84 - 2y^2 = 0$

$D = (y-7)^2 - 4(2y^2+84-2y) = -7y^2 - 6y - 287 < 0$

значит, x не имеет решений, даже если x не N.

Следовательно, нет решений ни для x ни для y.

Ответ: нет решений; $x \in \varnothing$; $y \in \varnothing$.