ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004439

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	П О Л У С М А К
	Имя	И Л Ь Я
	Отчество	В А Л Е Р Ь Е В И Ч
5.	Дата рождения	1 8 (число) 0 1 (месяц) 2 0 0 4 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Московская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Сергиев Посад
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	ГБОУ МО СП ФМЛ

Место для скобы

Место для скобы

Шифр 004439

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
22	14.04.21	Кордюкова Е.Е.	[illegible]

№2

$\sin 2x + \sin^5 2x + 2020 \cdot \sin^9 2x = \cos 4x + \cos^5 4x + 2020 \cos^9 4x$

~~sin 2x + sin^5 2x + 2020 sin^9 2x = cos 4x + c~~

$t, t^5, 2020t^9$ ↗ монотонно. 2

$f(t) = t + t^5 + 2020t^9$ – строго возрастающая функция ⇒ f(t) строго возрастает ⇔

⇔ из $f(\sin 2x) = f(\cos 4x) \Rightarrow \sin 2x = \cos 4x$

$\sin 2x = \cos 4x$

~~sin 2x = 1 – 2 sin^2 2x~~ $\sin 2x = 1 - 2\sin^2 2x$

$2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$

$\sin 2x = \frac{-1 \pm 3}{4}$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = -1 \quad (1) \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \quad (2) \end{array}\right.$

1	2	3	4	5	Σ
2	7	4	4	5	22

(1) $\sin 2x = -1 \Rightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

(2) $\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \pi k \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi k \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Записать одной ~~серией~~ серией можно как:

$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \cdot k, \ k \in \mathbb{Z}$

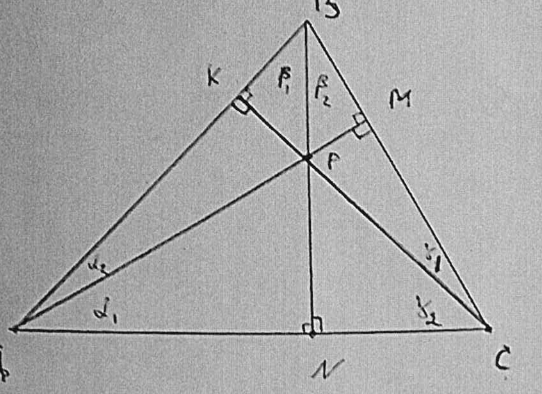
Ответ: $x = \frac{-\pi}{4} + \frac{\pi k}{3}, \ k \in \mathbb{Z}$

+

Место для скобы

Шифр 004439

№5



Отметим углы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ как на чертеже

$$\frac{AB}{PK} = \frac{AK}{PK} + \frac{BK}{PK} = ctg\,\alpha_2 + ctg\,\beta_1$$

С BC и AC аналогично, поэтому надо минимизировать $ctg\,\alpha_1 + ctg\,\alpha_2 + \ldots + ctg\,\gamma_2$

$$ctg\,\alpha_1 + ctg\,\alpha_2 = \frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} + \frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2} = \frac{\cos\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 + \sin\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2}{\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2} = \frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\left(\frac{\cos(\alpha_1-\alpha_2) - \cos(\alpha_1+\alpha_2)}{2}\right)}$$

, $\alpha_1+\alpha_2$ - постоянен, поэтому минимум достигается при максимальном знаменателе, а он максимален при максимальном $\cos(\alpha_1-\alpha_2)$, то есть при $\alpha_1-\alpha_2 = 2\pi k, k \in Z$

То есть $\alpha_1 = \alpha_2$ (т.к. $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_1 < \pi$ и $\alpha_2 > 0$ и $\alpha_2 < \pi$)

С остальными вершинами аналогично, поэтому $\frac{AB}{PK} + \frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN}$ - минимально, когда $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$, то есть P - точка пересечения биссектрис

Ответ: P - точка пересечения биссектрис $\triangle ABC$

±

Место для скобы

Место для скобы

Место для скобы

Шифр 004439

№1

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$, $x - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$ — целые $\Rightarrow \{\frac{1}{x}\} = \{\frac{1}{x^2+2021}\}$, также

$x = \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2+2021} = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow \{\frac{1}{x}\} = \{x\} = \{\frac{1}{x^2+2021}\}$, где $\{x\}$ — дробная часть x,

То есть $\{x\} = x - [x]$, где $[x]$ — целая часть x (наибольшее целое число не превосходящее x)

~~[illegible]~~

$x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$ и $\frac{1}{x^2+2021} \in (0; \frac{1}{2021}) \Rightarrow \{\frac{1}{x^2+2021}\} = \frac{1}{x^2+2021} \in (0, \frac{1}{2021})$

Разберем случаи:

1) $x > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \in (0; 1) \Rightarrow \{\frac{1}{x}\} = \frac{1}{x}$ и поэтому $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2+2021}$, $x^2+2021 = x$,

$x^2 - x + 2021 = 0$

корней нет, т.к. $D < 0$

2) $x = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \{\frac{1}{x}\} = 0$, а $\{\frac{1}{x^2+2021}\} \in (0, 2021) \Rightarrow \{\frac{1}{x}\} \neq \{\frac{1}{x^2+2021}\}$

3) $x \in (0; 1) \Rightarrow \{x\} = x$, $x = \frac{1}{x^2+2021}$ $x \in (0; 1) \Rightarrow x^2 \in (0; 1) \Rightarrow (x^2+2021) \in (2021; 2022)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1}{x^2+2021} \in (\frac{1}{2022}; \frac{1}{2021}) \Rightarrow \frac{1}{x} \in (2021, 2022) \Rightarrow \{\frac{1}{x}\} = \frac{1}{x} - 2021$

$\frac{1}{x} - 2021 = \{\frac{1}{x}\} = \{x\} = x \Rightarrow 1 - 2021x = x^2$, $x^2 + 2021 = 2022 - 2021x$

См. дальше →

Место для скобы

Место для скобы

Шифр

$$\frac{1}{x^2+2021}=\frac{1}{2022-2021x}=x,\quad -2021x^2+2022x=1$$

$2021x^2-2022x+1=0$

$x=1$ или $x=\frac{1}{2021}$, то $x\in\left(\frac{1}{2022};\frac{1}{2021}\right)\Rightarrow$ нет таких $x\in(0,1)$, что

$$\left\{\frac{1}{x}\right\}=\{x\}=\left\{\frac{1}{x^2+2021}\right\}$$

4) $x\in[-1;0)\Rightarrow\{x\}=x+1=\frac{1}{x^2+2021}\in\left(0;\frac{1}{2021}\right)\Rightarrow x\in\left(-1;-\frac{2020}{2021}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{1}{x}\in\left(-\frac{2021}{2020},-1\right)\Rightarrow\left\{\frac{1}{x}\right\}=\frac{1}{x}+2\in\left(\frac{2019}{2020};1\right)=\frac{1}{x}+2$

$\frac{1}{x}+2=\frac{1}{x^2+2021}$, но $\left(\frac{2019}{2020};1\right)$ и $\left(0;\frac{1}{2021}\right)$ не пересекаются

5) $x<-1\Rightarrow\frac{1}{x}\in(-1;0)\Rightarrow\left\{\frac{1}{x}\right\}=\frac{1}{x}+1=\frac{1}{x^2+2021}\in\left(0;\frac{1}{2021}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{1}{x}\in\left(-1;-\frac{2020}{2021}\right)\Rightarrow x\in\left(-\frac{2021}{2020};-1\right)\Rightarrow\{x\}=x+2=\frac{1}{x^2+2021}\in\left(0;\frac{1}{2021}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\left(-2;-2+\frac{1}{2021}\right)$, но $\left(-\frac{2021}{2020};-1\right)$ и $\left(-2;-2+\frac{1}{2021}\right)$ не пересекаются,

поэтому все 3 числа из условия целыми быть одновременно не могут.

Ответ: не существует

Место для скобы

Место для скобы

Шифр

№4

$f(x) = \frac{x^3}{m+cx} + \frac{m}{x^3+cx} + \frac{cx}{m+x^3}$, где $c = \sqrt[3]{2020^4}$

Обозначим $a = m$, $b = x^3$, $c = cx$, тогда

$\left(\frac{b}{a+c} + \frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+b}\right)$, $a, b, c > 0$

Докажем, что это $\geqslant \frac{3}{2}$ и $= \frac{3}{2}$ только при $a = b = c$

Пусть $u = b+c$, $v = a+c$, $w = a+b$, тогда

$a+b+c = \frac{u+v+w}{2}$, $a = \frac{w+v-u}{2}$, $b = \frac{u+w-v}{2}$, $c = \frac{u+v-w}{2}$

и $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2}\left(\frac{v+w-u}{u} + \frac{u+w-v}{v} + \frac{u+v-w}{w}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u} + \frac{u}{w} + \frac{w}{u} + \frac{w}{v} + \frac{v}{w} - 3\right)$?

$\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geqslant 2\sqrt{\frac{u}{v}\cdot\frac{v}{u}} = 2$ по неравенству о средних, равно только при $\frac{u}{v} = \frac{v}{u}$, то есть $u = v$

Аналогично $\frac{u}{w} + \frac{w}{u} \geqslant 2$ и $\frac{v}{w} + \frac{w}{v} \geqslant 2 \Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{1}{2}\cdot(6-3) = \frac{3}{2}$

и $= \frac{3}{2}$ только при $u = w = v$, то есть $a = \frac{u}{2}$, $b = \frac{u}{2}$, $c = \frac{u}{2} \Rightarrow a = b = c$

$\Rightarrow f \leqslant \frac{3}{2}$ только при $a = b = c$, то есть

(при $a = b$ и $a = c$ действительно получаем $\frac{3}{2}$)

$m = x^3 = cx$, то есть $x^2 = c \Rightarrow x = \sqrt{c}$ и $m = cx = c\sqrt{c} \Rightarrow m = c\sqrt{c}$ - единственное, при котором есть положительные решения неравенства

См. дальше →

Место для скобы

Шифр

$c\sqrt{c} = 2020^2 = 4080400$

Ответ: $n = 4080400$

X

№3

Посмотрим на производную сигнала

$p'(t) = nt^{n-1} + 5(n-1)t^{n-2} = t^{n-2} \cdot (tn + 5(n-1))$

Две точки экстремума: $t_1 = 0$
$t_2 = 5 \cdot \left(\frac{1-n}{n}\right)$?? $p(t_1) = 3 > 0$; $p'(t > t_1) > 0$ ⇒

⇒ функция возр., экстр. $t_1 = 0$ не сущ-ет при $n = 2$, но в этом случае $p(t)$ имеет 2 решения

$-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{2}}$

и не раскладывается нужным образом

при $n > 2$ т.к. $t_2 < t_1$, а t_1 - лок. min или точка перегиба $p(t)$ имеет ≤ 2 корней

в таком случае, если у сл. задачи верно, то $p(t)$ раск-ся в произв. многочлены

1 из которых в степени $(n-2)$ или $(n-1)$, а оставшиеся вида $(t-x)$ или (t^2+at+b)

$p(t) = (t+5)t^{n-1} + 3$

При нечетном n $p(-5) = 3 > 0$, $p(-6) = -1 \cdot (-6)^{n-1} + 3 < 0$?? ⇒ $p(t)$ имеет корень на пром. $(-6; -5)$

⇒ корень не целый

К тому же $p(t_2) = 5^n \cdot \frac{(1-n)^n}{n^n} + 5^n \cdot \left(\frac{1-n}{n}\right)^{n-1} + 3 = 5^n \cdot \frac{(1-n)^{n-1}}{n^n} + 3 > 0$ ⇒ t_2 - т. max

Место для скобы

Шифр

и $P(t)$ имеет ед. корень, и значит разложение на многочлен содерж. скобку $(t-x)$, но x – не целое при чётном n $P(t_2)<0$ и многочлен имеет 2 корня

$P(0)=3$

$P(-1)=4\cdot(-1)^{n-1}+3>0$ $\Rightarrow$ 1 корень на $(-1;0)$ не целый, скобку $(t-x)$ но $x \notin \mathbb{Z}$

при чётном n $P(t_3)<0$ и нечётном имеет 2 корня $P(0)=3$, $P(-1)=4(-1)^{n-1}+3<0$

$\Rightarrow$ 1 корень на $(-1;0)$ не целый, $P(-5)=3>0$ $P(-4)=(-4)^{n-1}+3<0$

2ой корень на $(-5;-4)$

Пусть 1ый корень $x\in(-1;0)$, 2ой $-4+y$, $y\in(-1;0)$, т.к. сумма корней коэф. мн $\in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (y+x)\in \mathbb{Z}$

$(x+y)\in(-2;0) \Rightarrow x+y=-1 \Rightarrow y=-x \Rightarrow$ т.к. произв корней коэф. многочл. $\in \mathbb{Z}$

$(-4-x)\cdot x \in \mathbb{Z} = -x^2-4x\in(0;3) \Rightarrow -x^2-4x=1$ или 2 при $-4x-x^2=1$ $x=\sqrt{3}-2$ (нужный)

$P(\sqrt{3}-2)=(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}-2)^{n-1}+3<0$, т.к. $(\sqrt{3}-2)^{n-1}>0$

$\sqrt{3}+3>3 \Rightarrow$ и при чётном n не пол-ся разложить $P(t)$ на произв. многочл. с цел. коэф.