004410

Шифр

**ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА**
**ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»**

**ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Предмет | Орг. документы |
| 2. | Вариант | Математика 11 класс Вариант 3 закл |
| 3. | Класс | 11 |
| 4. | Фамилия | П И С Е Е В А |
| | Имя | Д А Р Ь Я |
| | Отчество | А Л Е К С Е Е В Н А |
| 5. | Дата рождения | 1 3 (число) 0 8 (месяц) 2 0 0 3 (год) |
| 6. | Страна | Россия |
| 7. | Регион (пр: Томская обл., Алтайский край) | Московская обл |
| 8. | Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня) | Посёлок |
| 9. | Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков) | Лосино-Петровский |
| 10. | Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь | МАОУ Лицей №14 имени Ю.А.Гагарина |

Место для скобы

Шифр 4440

https://olymp.tsu.ru/Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. членов жюри | Подписи членов жюри |
| --- | --- | --- | --- |
| 16 | 14.04.22 | Коржакина Е.Е. | [illegible] |

№1

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$; $x-\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$.

$\frac{x^2+2021-x}{x(x^2+2021)}$; $\frac{x^2-1}{x}$; $\frac{-x^2-2021+x}{x(x^2+2021)}$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 7 | 2 | 5 | 0 | 16 |

Во всех этих ~~дробей~~ дробях, нужно, чтобы числитель нацело делился на знаменатель

Рассмотрим число $\frac{x^2-1}{x}$; ~~Нужн~~ это число целое

$\frac{x^2-1}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{1}{x}=x-\frac{1}{x}$; ~~Чтобы получилось целое число~~

~~Подходит~~ только при $x=1$ или $x=-1$, $x=\sqrt{2}-1$, ? иначе получим не целое число ?

Подставим $x=1$, в оставшиеся выражения

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$ и $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$

$\frac{1}{1}-\frac{1}{1+2021}=1-\frac{1}{2022}=\frac{2021}{2022}$ – не целое число $\Rightarrow x=1$ нам,

не подходит

Место для скобы

Шифр 004440

Подставим $x=-1$, в выражение

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}=\frac{1}{-1}-\frac{1}{1+2021}=-1-\frac{1}{2021}$ - не целое число $\Rightarrow x=-1$, не подходит

Подставим $\sqrt{2}-1$, в выражения $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$; $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ $\frac{x^2+2021-x}{x(x^2+2021)}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2+2021-\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)((\sqrt{2}-1)^2+2021)}=\frac{2-2\sqrt{2}+1+2021-\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(2-2\sqrt{2}+1+2021)}$

$=\frac{-3\sqrt{2}+2025}{(\sqrt{2}-1)(-2\sqrt{2}+2024)}=\frac{-3\sqrt{2}+2025}{-4+2024\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2024}=\frac{-3\sqrt{2}+2025}{2026\sqrt{2}-2026}=\frac{-3(\sqrt{2}-675)}{2026(\sqrt{2}-1)}$ - не целое число $\Rightarrow$ $x=\sqrt{2}-1$ не подх.

Из всего этого следует, что не существует таких $x$ при котором 3 данных числа были бы целыми

$\mp$

Место для скобы

Шифр 004440

№2

$\sin(2x)+\sin^5(2x)+2020\cdot\sin^9(2x)=\cos(4x)+\cos^5(4x)+2020\cos^9(4x)$

Пусть $\sin(2x)=a$; $\cos(4x)=b$, тогда

$a+a^5+2020\cdot a^9=b+b^5+2020\cdot b^9$

Рассмотрим функцию $f(t)=t+t^5+2020t^9$

Производная от этой функции:

$f'(t)=1+4t+\cancel{2020t^8}\,2020\cdot 9t^8>0$ при всех $t$

$\Rightarrow f(t)$ строго возрастающая

$a+a^5+2020a^9=b+b^5+2020\cdot b^9 \Rightarrow f(a)=f(b)$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a=b$, то есть $\sin 2x=\cos 4x$

$\sin 2x=1-2\sin^2 2x$

Пусть $\sin 2x=t$

$2t^2+t-1=0$

$D=1+8=9=3^2$

$t_1=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}$

$t_2=\frac{-1-3}{4}=\frac{-4}{4}=-1$

Обратная замена:

$\sin 2x=\frac{1}{2}$ или $\sin 2x=-1$

Место для скобы

Шифр

$\sin(2x)=\frac{1}{2}$ или $\sin(2x)=-1$

$\left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in z \,/:2 \\ 2x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in z \,/:2 \end{array}\right.$ $\quad 2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in z \,/:2$

$x=-\frac{\pi}{4}+\pi m, m\in z$

$x=\frac{\pi}{12}+\pi k, k\in z$

$x=\frac{5\pi}{12}+\pi n, n\in z$

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}+\pi k, k\in z$ $\quad x=-\frac{\pi}{4}+\pi m, m\in z$

$x=\frac{5\pi}{12}+\pi n, n\in z.$

+

Место для скобы

№4

Шифр

$$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x\cdot(x^2+\sqrt[3]{2020^4})} - \frac{\sqrt[3]{2020^4}\cdot x}{m+x^3}$$

$m>0$; $x\ge 0$

Пусть $x^3=a$; $x\cdot\sqrt[3]{2020^4}=b$, тогда

$$\frac{a}{m+b}+\frac{m}{a+b}+\frac{b}{a+m}\le\frac{3}{2}$$

$$2=\frac{(m+b)(a+b)(a+m)}{amb}$$

Далее мы несколько раз будем пользоваться корнями о средних:

$$\frac{a}{m+b}+\frac{m}{b+c}+\frac{b}{a+m}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\frac{a\cdot m\cdot b}{(m+b)(b+c)(a+m)}}\ge\sqrt[3]{\frac{a\cdot b\cdot m}{2\sqrt{mb}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{am}}}.$$

$$=3\cdot\sqrt[3]{\frac{a\cdot b\cdot m}{8abm}}=\frac{3}{2}$$

?

Мы получили, что $\frac{a}{m+b}+\frac{m}{a+b}+\frac{b}{a+m}\ge\frac{3}{2}$ при всех $(a,b,m>0)$

Это равенство возможно ~~при всех~~ ~~$(a,b,m>0)$~~ если

$$\frac{a}{m+b}=\frac{m}{a+b}=\frac{b}{a+m}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{a}{m+b}=\frac{1}{2}\;\frac{m}{a+b}=\frac{1}{2}\;\frac{b}{a+m}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow a=m=b=x$

$m+b=a+b=a+m$

$x^3=x\cdot\sqrt[3]{2020^4}=1$

$\frac{x\sqrt[3]{2020^4}}{x^2}=1$

$x^2=2020^{\frac{4}{3}}$

$x=2020^{\frac{2}{3}}$

$m=2020^{\frac{2}{3}}\cdot 2020^{\frac{4}{3}}$

$m=2020^2=4080400$

$$\begin{array}{r} 2020\\ \times\,2020\\ \hline 404\\ 404\\ \hline 4080400\end{array}$$

Ответ $m=4080400$

+

Место для скобы

Шифр

№3

$p(t) = t^n + 5 \cdot t^{n-1} + 3$, при $n$ - целое число.

~~$-21$~~ ~~$-214+40$~~

$\cancel{\left(x - \frac{(-5+\sqrt{13})}{2}\right) = 0}$

Предположим, что $n=2$, тогда

$t^2 + 5t + 3 = 0$

$D = 25 - 12 = 13$

$t_1 = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$,

$t_2 = \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$

$\left(t + \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)\left(t + \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right) = 0$

Предположим, что $n=3$, тогда

$t^3 + 5t^2 + 3 = 0$

Пусть $t^2 = x > 0$

$x^2 + 5x + 3 = 0$

$\cancel{\left(x + \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)}$ $x = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$

Обратная замена

$t^2 = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$

$t = \sqrt{\frac{\sqrt{13}-5}{2}}$

Из этих двух примера $\Rightarrow$ что нельзя представить $p(t)$ в виде произведения многочленов положительной степени с целыми коэффициентами

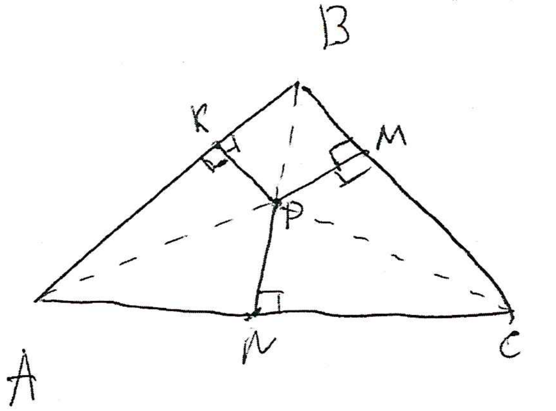


1

Место для скобы

**Шифр**

№5




Дано: $\Delta ABC$

точка P лежит внутри $\Delta ABC$; Точки M, N, K являются ортогональными проекциями точки P на прямые BC, AC и AB соответственно.

Найти: все точки P при которых $\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK} \to min$.

Решение

Проведем прямые AP, BP, PC. Получим 7 прямоугольных треугольников APK, BPK, BMP, CPM, CPN, APN. Точка P вершина каждого из 7 треугольников. Так же образовались 3 треугольника BPA, APC, CPB высота которых PK, PN, PM - соответственно