ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004442

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	П Е Т И Н
	Имя	К О Н С Т А Н Т И Н
	Отчество	А Н Т О Н О В И Ч
5.	Дата рождения	11 (число) 12 (месяц) 2003 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Ростовская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Ростов-на-Дону
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МАОУ «Классический лицей №1»

Место для скобы

Шифр 004442

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
18 ~~19~~	14.04.21	Кадрякова Е.Е. Гетушина И.О.	

№2

1	2	3	4	5	Σ
2	7	~~2~~ 1	5	3	~~19~~ 18

$$\sin(2x)+\sin^5(2x)+2020\cdot\sin^9(2x)=\cos(4x)+\cos^5(4x)+2020\cdot\cos^9(4x)$$

Обозначу $\sin(2x)$ как a, а $\cos(4x)$ обозначу как $в$, тогда:

$a+a^5+2020\cdot a^9=в+в^5+2020в^9$

$f(a)=a+a^5+2020\cdot a^9$; $f(в)=в+в^5+2020в^9$

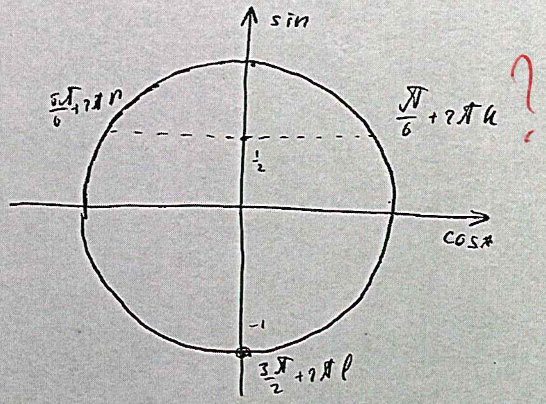
Теперь, возьму производную от $f(a)$:

$f'(a)=1+5a^4+18180\cdot a^8$; т.к. $a^4\geq 0$ всегда и $a^8\geq 0$ всегда, то и $1+5a^4+18180\cdot a^8>0$ всегда $\Rightarrow f'(a)>0$ всегда $\Rightarrow$ функция $f(a)$ монотонно возрастает.

Теперь, возьму производную от $f(в)$:

$f'(в)=1+5в^4+18180в^8$; т.к. $в^4\geq 0$ всегда и $в^8\geq 0$ всегда, то $1+5в^4+18180в$ всегда $\Rightarrow$ а $f'(в)>0$ всегда $\Rightarrow$ функция $f(в)$ монотонно возрастает.

Т.к. обе функции $f(a)$ и $f(в)$ монотонно возрастают, то $f(a)=f(в)$ только тогда, когда $a=в$



?

$a=в$

$\sin(2x)=\cos(4x)$

$\sin(2x)=1-2\sin^2(2x)$

$2\sin^2(2x)+\sin(2x)-1=0$

Пусть $\sin(2x)=a$, тогда

$2a^2+a-1=0$

$D=1+8=9$

$$\left[\begin{array}{l} a_1=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2} \\ a_2=-1 \end{array}\right.$$

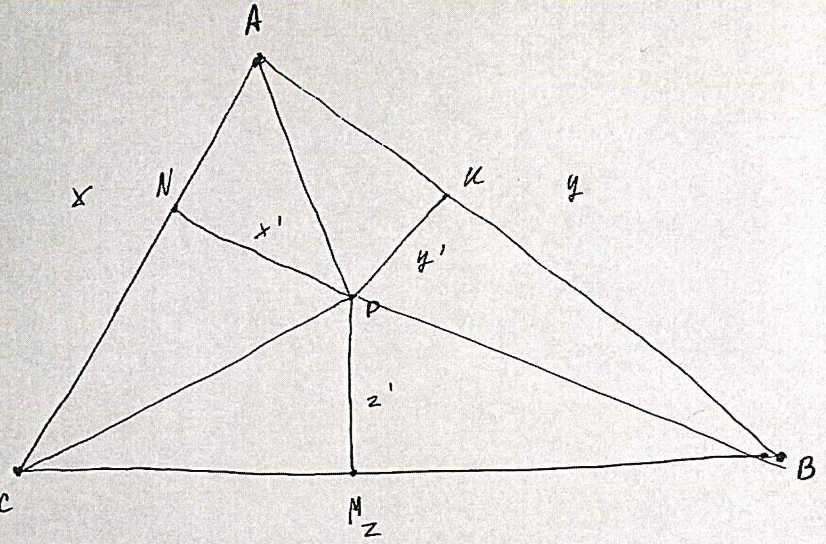
$$\left[\begin{array}{l} \sin(2x)=\frac{1}{2} \\ \sin(2x)=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ k\in Z \\ 2x=\frac{5\pi}{6}+2\pi r;\ r\in Z \\ 2x=\frac{3\pi}{2}+2\pi l;\ l\in Z \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+\pi k;\ k\in Z \\ x=\frac{5\pi}{12}+\pi r;\ r\in Z \\ x=\frac{3\pi}{4}+\pi l;\ l\in Z \end{array}\right.$$

×

Место для скобы

Шифр 004442

№5



Дано: $\triangle ABC$; M, N, K — ортогональные проекции точки P на прямые BC, AC и AB соотв.

Найти: Все такие P, для которых $\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$ минимальна.

Решение.

1) Обозначу AC как x, AB как y, BC как z, а отрезки PN, PK и PM как x', y' и z' =>

=> $\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK} = \frac{z}{z'}+\frac{x}{x'}+\frac{y}{y'}$

2) Т.к. N, K и M — ортогональные проекции точки P на стороны AC, AB и BC соответственно, то $PN \perp AC$; $PK \perp AB$ и $PM \perp CB$

3) $S(ABC) = S(APC) + S(APB) + S(CPB)$, где $S(APC) = \frac{1}{2}x\cdot x'$; $S(APB) = \frac{1}{2}y\cdot y'$; $S(CPB) = \frac{1}{2}z\cdot z'$

$S(ABC) = \frac{1}{2}x\cdot x' + \frac{1}{2}y\cdot y' + \frac{1}{2}z\cdot z' \quad |\cdot 2$

$2S(ABC) = x\cdot x' + y\cdot y' + z\cdot z'$ — домножу на $\frac{z}{z'}+\frac{x}{x'}+\frac{y}{y'}$

$\left(\frac{x}{x'}+\frac{y}{y'}+\frac{z}{z'}\right)\cdot 2S(ABC) = x\cdot x' + y\cdot y' + z\cdot z'\cdot\left(\frac{x}{x'}+\frac{y}{y'}+\frac{z}{z'}\right)$

4) $x\cdot x' + y\cdot y' + z\cdot z'\cdot\left(\frac{x}{x'}+\frac{y}{y'}+\frac{z}{z'}\right) = x^2+y^2+z^2 + \frac{x\cdot x'\cdot y}{y'} + \frac{x\cdot x'\cdot z}{z'} + \frac{x\cdot y\cdot y'}{x'} + \frac{z\cdot y\cdot y'}{z'} + \frac{z\cdot z'\cdot x}{x'} + \frac{z\cdot z'\cdot y}{y'}$

$= x^2+y^2+z^2 + xy\cdot\left(\frac{x'}{y'}+\frac{y'}{x'}\right) + xz\cdot\left(\frac{x'}{z'}+\frac{z'}{x'}\right) + yz\cdot\left(\frac{y'}{z'}+\frac{z'}{y'}\right)$

Т.к. $\frac{x'}{y'}$ и $\frac{y'}{x'}$ — взаимно обратные числа, по неравенству о средних и т.к. эти числа положительные, то $\frac{x'}{y'}+\frac{y'}{x'} \geq 2$

Аналогично, $\frac{x'}{z'}+\frac{z'}{x'} \geq 2$ и $\frac{y'}{z'}+\frac{z'}{y'} \geq 2$ =>

=> $x^2+y^2+z^2 + xy\cdot\left(\frac{x'}{y'}+\frac{y'}{x'}\right) + xz\cdot\left(\frac{x'}{z'}+\frac{z'}{x'}\right) + yz\cdot\left(\frac{y'}{z'}+\frac{z'}{y'}\right) \geq x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

Минимальное значение в данном неравенстве будет достигаться при равенстве

левой и правой части => $x'=y'=z'$ (достигается при равенстве слагаемых) => Расстояние от точки P до сторон $\triangle ABC$ равно => P — центр вписанной окр.

? ?

Ответ: P — центр вписанной окр.

Место для скобы

Шифр 004442

№3

$p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$; $n > 1$, n - целое число

По теореме Виета для многочлена n-ой степени:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + \ldots + t_n = -5 \\ t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_n = 3 \end{cases}$$

t_i - корни
$i \in [1; n]$
i - целое

$t^n + 5t^{n-1} + 3 = 0$

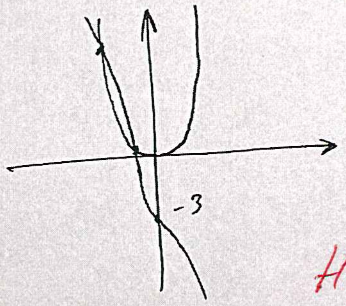
$t^n = -5t^{n-1} - 3$

При n - четных:

$y_1 = t^n$

$y_2 = -5t^{n-1} - 3$

Не более двух отрицательных корней →

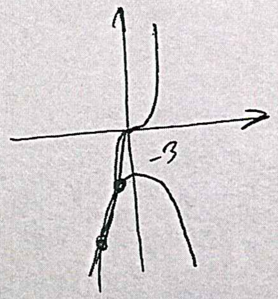


Некорр. графики

При n - нечетных: $y_1 = t^n$

$y_2 = -5t^{n-1} - 3$

не более двух отрицательных корней →



Т.к. по т. Виета кол-во отрицательных корней четно, т.к. $t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_n = 3$ => 2 отрицательных корня.

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 5 \\ t_1 \cdot t_2 = 3 \end{cases}$$ => уравнение $t^2 + 5t + 3 = 0$ имеет такие же решения

$t^2 + 5t + 3 = 0$

$D = 25 - 12 = 13$

$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$; $\sqrt{13} \approx 3,6$ => $\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2} < 0$ => t_1 и $t_2 < 0$ => из мн-на $p(t)$ можно выделить $f(t) = (t^2 + 5t + 3)$, а второй множитель будет $q(t) = (t^{n-2} + (-3) \cdot t^{n-4} + \ldots + 1)$

№3 (продолжение)

$$\begin{array}{l|l} t^n + 5^{n-1} + 3 & t^2 + 5t + 3 \\ \hline -\,t^n + 5t^{n-1} + 3 \cdot t^{n-2} & t^{n-2} - 5t^{n-4} + \ldots + 1 \\ \quad -3t^{n-2} + 3 & \\ \quad -\,-3t^{n-2} - 15t^{n-3} & \\ \quad\quad 15t^{n-3} + \ldots & \end{array}$$

В итоге получаю квадратное уравнение у которого корни совпадают с корнями из т. Виета для исходного, причем исходное при четных и нечетных n имеет 2 отрицательных решения (исходя из графиков) => эти два решения и есть те решения что и наши, и можно выделить квадратный трехчлен самостоятельно

Ответ: Можно.

F

Ответ неверный

Недост. обосн.

Место для скобы

Шифр

№4

1) $$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x\cdot(x^2+\sqrt[3]{2020^4})} - \frac{\sqrt[3]{2020^4}\cdot x}{m+x^3}$$

$x>0;\ m>0$

2) Пусть $\sqrt[3]{2020^4}\cdot x = a$, тогда $a>0$

$$\frac{x^3}{m+a} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x^3+a} - \frac{a}{m+x^3}$$

$$\frac{x^3}{m+a} + \frac{m}{x^3+a} + \frac{a}{m+x^3} \le \frac{3}{2};$$

Сумма и отношение положительных чисел положительно =>

$$=> \frac{1}{\frac{x^3}{m+a} + \frac{m}{x^3+a} + \frac{a}{m+x^3}} \geq \frac{2}{3} \quad | \cdot 3$$

$$\frac{3}{\frac{x^3}{m+a} + \frac{m}{x^3+a} + \frac{a}{m+x^3}} \geq 2$$

3) По неравенству о средних: $\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \le \frac{x+y+z}{3}$ равенство будет достигаться при $a=b=c$

Поэтому, $$\frac{\frac{m+a}{x^3} + \frac{x^3+a}{m} + \frac{m+x^3}{a}}{3} \geq \frac{3}{\frac{x^3}{m+a} + \frac{m}{x^3+a} + \frac{a}{m+x^3}} \geq 2$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{m+a}{x^3} + \frac{x^3+a}{m} + \frac{m+x^3}{a}\right)}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{m}{x^3} + \frac{x^3}{m} + \frac{a}{x^3} + \frac{x^3}{a} + \frac{a}{m} + \frac{m}{a}\right) \geq 2$$ – выполняется ?!

Заметим, что оценка в последствии достигается при таких же условиях, что и в исходном неравенстве: ??

$$\begin{cases} x^3 = m \\ m = a \\ x^3 = a \end{cases} =>$$ [redacted]

$x^3 = \sqrt[3]{2020^4}\, x$

т.к. $x>0$

$\Downarrow$

$x^2 = \sqrt[3]{2020^4}$

$x = \sqrt[3]{2020^2}$

[redacted]

$=> m = 2020^2$

Ответ: $m = 2020^2$

Место для скобы

Шифр

№1

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$; $x - \frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$;

Обозначу $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$ как a; $x - \frac{1}{x}$ – как $в$; $\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$ – как c.

Т.к. a, $в$ и c – целые числа, то и их сумма будет целым числом

Замечаю, что первое и третье число взаимно обратны по знаку $\Rightarrow a = -c$

$a + в = x - \frac{1}{x^2+2021}$ – должно быть целым.

При этом, x и $\frac{1}{x}$ не могут иметь одинаковая дробная часть, если это не ± 1

Если $x - \frac{1}{x^2+2021}$ – целое $\Rightarrow$ $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$ – это целое только при $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2+2021}$ $\Rightarrow$

дробь по модулю < 1

$\Rightarrow x^2 - x + 2021$

$D < 0 \Rightarrow$ нет таких x

Получаю, что не существует таких чисел.

Ответ: Не существует.