07463

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

мет	МАТЕМАТИКА
ант	
с	11
илия	ПАЛЕЦКАЯ
	ЕЛИЗАВЕТА
ство	ЕВГЕНЬЕВНА
рождения	22 (Число) 11 (Месяц) 2005 (Год)
на	Российская Федерация
он *(пр: Томская обл., …инградская область)*	Республика Хакасия
униципального образования *…т, деревня, село, город)*	Город
енный пункт *(пр: Томск, …рово, Псков)*	Абакан
ое наименование …овательного учреждения, …ором Вы обучаетесь в …ее время	МБОУ „Лицей им. Н.Г. Булакина"

…асие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail …езультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ______

1|2|3|4|5
6|0|0|7|5

Шифр 07463

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
18б	30.03.23	Гейфмана	

№4 ax^3-ax^2+bx+b — старший коэф. a => справедливо равенство $ax^3-ax^2+bx+b = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = a(x^3-x^2x_2-x^2x_3+xx_2x_3-x^2x_1+xx_1x_2+xx_1x_3-x_1x_2x_3) = ax^3-ax^2(x_2+x_3+x_1)+ax(x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3)-ax_1x_2x_3$. Представив коэффициенты разными способами, можно составить систему:

$$\begin{cases} -a(x_1+x_2+x_3) = -a & \text{(коэф. 2-й степени)} \\ a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) = b & \text{(коэф. 1-й степени)} \\ -ax_1x_2x_3 = b & \text{(свободный член)} \end{cases}$$

7б

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 1 \\ \dfrac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{-x_1x_2x_3} = 1 \end{cases}$$

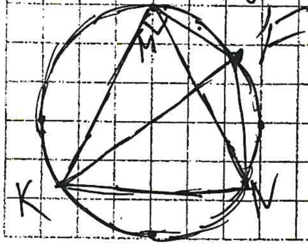
Таким образом

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{-x_1x_2x_3}\right) = 1$$

$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}\right) = -1$, что и требовалось доказать

№5

Частный случай: KF — диаметр (c MF и NF в качестве диаметров аналогично т.к. Δ равносторонний).



5б

Пусть $MK = MN = NK = a$

Т.к. KF — диаметр, ΔKMF прямоуг. => $\angle MFK$ и $\angle KNM$ опираются на хорду MK => равны

Шифр 7463

между собой. $MF = KM \cdot ctg\angle MFK = a \cdot ctg\angle MNK = a \cdot ctg 60^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $KF = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

Аналогично $FN = \frac{a}{\sqrt{3}}$. $MF^4 + FN^4 + KF^4 = \frac{a^4}{9} + \frac{a^4}{9} + \frac{16a^4}{9} = 2a^4$.

Таким образом для общего случая необходимо д-ть, что $MF^4 + FN^4 + KF^4 = 2a^4$

№1

$2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 + 7y^2 - 42y + 33 = 0$. Т.к. первые 3 слагаемые ≥ 0, то $7y^2 - 42y + 33 \leq 0$

$D/4 = 441 - 231 = 210 = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$, $y_0 = \frac{21 \pm \sqrt{210}}{7} = 3 \pm \sqrt{\frac{30}{7}}$

$y \in \left[3 - \sqrt{\frac{30}{7}}, 3 + \sqrt{\frac{30}{7}}\right]$. Т.к. $2 < \sqrt{\frac{30}{7}} < 3$ $\left(\sqrt{\frac{28}{7}} < \sqrt{\frac{30}{7}} < \sqrt{\frac{63}{7}}\right)$, то можно записать как $y \in [3-2, 3+2] \Leftrightarrow y \in [1, 5]$

- $y = 1$ $7y^2 - 42y + 33 = -2$
- $y = 5$ $7y^2 - 42y + 33 = -2$
- $y = 2$ $7y^2 - 42y + 33 = -23$
- $y = 4$ $7y^2 - 42y + 33 = -23$
- $y = 3$ $7y^2 - 42y + 33 = -30$

Таким образом $2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 = -7y^2 + 42y - 33$, $2x^2 + 2x^2z^2 + z^2$ может принимать значения 2, 23, 30. Легко заметить, что такие значения выражение принимает лишь в случае $|x| = 1$, $z = 0$ (в таком случае $2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 = 2$). Значит, уравнение решаемо в целых числах только при $y = 1, 5$, $x = \pm 1$ и $z = 0$

Ответ: $x = \pm 1$, $z = 0$, $y = 1, 5$