

**Министерство науки и высшего образования РФ**  
**Совет ректоров вузов Томской области**  
**Открытая региональная межвузовская олимпиада 2021-2022**  
**МАТЕМАТИКА (9 класс)**  
**Заключительный этап**  
**Вариант 1**

1. Существуют ли целые числа  $x$  и  $y$  такие, что  
 $(x + 2019)(x + 2020) + (x + 2020)(x + 2021) + (x + 2019)(x + 2021) = y^2$  ?  
**Ответ: нет, не существуют.**

**Решение.** Пусть  $k = x + 2019$ , тогда уравнение примет вид

$$k(k + 1) + (k + 1)(k + 2) + k(k + 2) = y^2 \quad \text{или} \quad 3k^2 + 6k + 2 = y^2.$$

Левая часть уравнения при делении на 3 дает остаток 2, а квадрат целого числа при делении на 3 может давать остаток или 0 или 1. Следовательно, целых  $k$  и  $y$  не существует, а значит и целого  $x$  тоже не существует.

2. В спортивном магазине за два дня продали тринадцать пар кроссовок, два спортивных костюма и одну футболку, при этом в первый день была выручена такая же сумма денег, что и во второй день (от продажи вышеперечисленного товара). Одна пара кроссовок дешевле спортивного костюма и дороже футболки на одну и ту же сумму. Сколько продали пар кроссовок и костюмов в один день с футболкой?  
**Ответ: 8 пар кроссовок и ни одного спортивного костюма.**

**Решение.** Пусть в один день с футболкой продали  $x$  костюмов и  $y$  пар кроссовок. Тогда в другой день продали  $2 - x$  костюмов и  $13 - y$  пар кроссовок.

Пусть  $c$  – цена одной пары кроссовок, а  $s$  – разница цен.

Тогда из условия задачи следует, что

$$x(c + s) + yc + (c - s) = (2 - x)(c + s) + (13 - y)c,$$
$$(14 - 2x - 2y)c = (2x - 3)s.$$

Число  $x$  может принимать значение 0, 1 или 2. Рассмотрим по очереди каждое из них

1)  $x = 0 \Rightarrow (2y - 14)c = 3s$ . Так как  $0 < s < c$ , то  $0 < (2y - 14)c < 3c \Rightarrow$

$$0 < (2y - 14) < 3 \Rightarrow y = 8 - \text{един. целое}$$

2)  $x = 1 \Rightarrow (2y - 12)c = s$ . Так как  $0 < s < c$ , то  $0 < (2y - 12)c < c \Rightarrow$

$$0 < (2y - 12) < 1 \Rightarrow y - \text{целых нет.}$$

3)  $x = 2 \Rightarrow (10 - 2y)c = s$ . Так как  $0 < s < c$ , то  $0 < (10 - 2y)c < c \Rightarrow$

$$0 < (10 - 2y) < 1 \Rightarrow y - \text{целых нет.}$$

Таким образом, описанная в условии задачи ситуация может осуществиться только при  $x = 0, y = 8$ .

3. Найдите  $g(2022)$ , если для любых действительных  $x, y$  выполняется равенство  
 $g(x - y) = 2022(g(x) + g(y)) - 2021xy$ .

**Ответ: 2043231.**

**Решение.** Подставим  $x = y = 0$ , получим

$$g(0) = 2022(g(0) + g(0)) - 2021 \cdot 0 \Rightarrow g(0) = 0.$$

Подставим  $x = y$ , получим

$$g(0) = 2022(g(x) + g(x)) - 2021 \cdot x^2 \Rightarrow g(x) = \frac{2021x^2}{2 \cdot 2022} \Rightarrow$$

$$g(2022) = \frac{2021 \cdot 2022^2}{2 \cdot 2022} = \frac{2021 \cdot 2022}{2} = 2021 \cdot 1011 = 2043231.$$

4. Докажите, что выражение

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + bz)^2 - (by + cx)^2 - (cz - ay)^2$$

можно представить в виде полного квадрата некоторого многочлена от переменных, входящих в данное выражение.

**Доказательство.**

Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + bz)^2 - (by + cx)^2 - (cz - ay)^2 = \\ & = a^2z^2 + b^2x^2 + c^2y^2 - 2abxz - 2bcxy + 2acyz = (az - bx + cy)^2. \end{aligned}$$

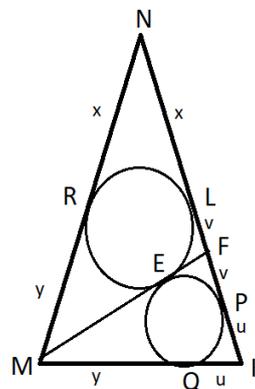
5. В равнобедренном треугольнике  $MNK$  стороны  $MN = NK = 8$ ,  $MK = 4$ . На стороне  $NK$  выбрана точка  $F$  так, что окружности, вписанные в треугольники  $MNF$  и  $MKF$ , касаются друг друга. Найдите площади треугольников  $MNF$  и  $MKF$ .

**Ответ:**  $S_{MNF} = 3\sqrt{15}$ ,  $S_{MKF} = \sqrt{15}$ .

**Решение.**

Обозначим через  $R, L, E, P, Q$  – точки касания,

$x, y, u, v$  – длины отрезков касательных, как указано на рисунке.



Тогда

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ y + u = 4, \\ x + 2v + u = 8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - u = (x + v) - (u + v) = 4, \\ (x + v) + (u + v) = 8. \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x + v = 6, \\ u + v = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NF = 6, \\ FK = 2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{S_{MNF}}{S_{MKF}} = \frac{NF}{FK} = 3 \Rightarrow S_{MKF} = \frac{1}{4} S_{MNK} = \frac{1}{8} MK \sqrt{MN^2 - \frac{(MK)^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 - \frac{4^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{60} = \sqrt{15}.$$

Тогда  $S_{MNF} = 3S_{MKF} = 3\sqrt{15}$ .

**Критерии оценивания приведены в таблице:**

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.