Место для скобы

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

03332

Шифр

1.	Предмет	математика
2.	Вариант	1
3.	Класс	11Б
4.	Фамилия	ОРЛОВ
	Имя	СТЕПАН
	Отчество	АЛЕКСЕЕВИЧ
5.	Дата рождения	Число: 30; Месяц: 07; Год: 2004
6.	Страна	
7.	Регион *(пр: Томская обл., Калининградская область)*	Кемеровская область
8.	Вид муниципального образования *(пр: пгт, деревня, село, город)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Анжеро-Судженск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь в данное время	МБОУ „Гимназия №11"

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ____________

Шифр | 03332

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
21	28.03	Коршкова Е.Е.	

1	2	3	4	5	Σ
7	1	5	7	1	21

№1

$2022! \cdot (S_{2021} - 1)$, если $S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$

Представим дробь $\frac{n}{(n+1)!}$ в следующем виде:

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Теперь S_n можно упростить:

$$S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) +$$
$$+ \dots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Тогда искомое выражение равно:

$$2022! \cdot (S_{2021} - 1) = 2022! \cdot \left(1 - \frac{1}{2022!} - 1\right) = -\frac{2022!}{2022!} =$$
$$= -1.$$

Ответ: -1

7

№4

$$\left.\begin{aligned} &a^3 - 2022a^2 + 1011 = 0, \\ &b^3 - 2022b^2 + 1011 = 0, \\ &c^3 - 2022c^2 + 1011 = 0. \end{aligned}\right\}$$

a, b, c — корни кубического уравнения это уравнения вида $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$;

По теореме Виета для кубического уравнения справедливо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{B}{A}, \\ x_1 x_2 \cdot x_2 x_3 \cdot x_1 x_3 = \frac{C}{A}, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{D}{A} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2022, \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -1011. \end{cases}$$

МФТИ
скобы

Шифр 03332

А т.к. $\frac{c/1}{a\cdot b}+\frac{a/1}{b\cdot c}+\frac{b/1}{a\cdot c}=\frac{a+b+c}{a\cdot b\cdot c}$, x_1, x_2, x_3 – корни уравнения,

т.е. a, b, c, то $\frac{1}{a\cdot b}+\frac{1}{a\cdot c}+\frac{1}{b\cdot c}=\frac{a+b+c}{a\cdot b\cdot c}=\frac{-B/A}{-D/A}=\frac{-B\cdot A}{-A\cdot D}=$

$=\frac{B}{D}=\frac{-2022}{1011}=-2.$

Ответ: -2

+

№3.

$P(x)=x^2+3x+2$; $\left(1-\frac{2}{p(1)}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{p(2)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{2}{p(2021)}\right)$

Найдём произведение не только для 2021, а для любого n.

Обозначим это произведение $a(n)$

$a(n)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k\cdot(k+3)}{(k+1)(k+2)}$

$\prod_{k=1}^{n}k=n!$; $\prod_{k=1}^{n}(k+3)=\frac{(n+3)!}{3!}$; $\prod_{k=1}^{n}(k+1)=\frac{(n+1)!}{1!}$; $\prod_{k=1}^{n}(k+2)=\frac{(n+2)!}{2!}$, =>

$\Rightarrow a(n)=n!\cdot\frac{(n+3)!}{3!}\cdot\frac{1!}{(n+1)!}\cdot\frac{2!}{(n+2)!}=\frac{1}{3}\cdot\frac{n+3}{n+1}$

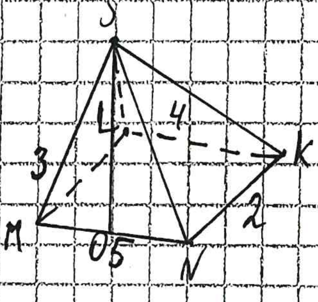
В задании $n=2021$. Подставим:

$a(2021)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2021+3}{2021+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2024}{2022}=\frac{1012}{3033}.$

Ответ: $\frac{1012}{3033}$

+

№5



Дано: SMNKL – пирамида.

MNKL – прямоугольник

$MN=5$, $NK=2$, $SM=3$,

$SN=4$.

Найти: SK и SL, при V_{max}, V – ?

Решение:

$V = \frac{1}{3} S \cdot h$;

$S_{MNKL} = MN \cdot NK = 5 \cdot 2 = 10$.

Проведем перпендикуляр SO.

Рассмотрим треугольник SNK. Прямая NK, проведённая в плоскости через основание наклонной, перпендикулярна к её проекции на эту плоскость, => перпендикулярна и самой наклонной (SN), т.е угол SNK – прямой.

По теореме Пифагора:

$SK = \sqrt{SN^2 + NK^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$.

Аналогично:

$SL = \sqrt{SM^2 + ML^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$

Рассмотрим $\triangle SMN$, в нем $\angle NSM = 90^\circ$, т.к. $MN^2 = SM^2 + SN^2$.

ON и OM – проекции катетов SN и SM треугольника SMN на гипотенузу MN, =>

$ON = \frac{SN^2}{MN} = \frac{16}{5} = 3{,}2$

$OM = \frac{SM^2}{MN} = \frac{9}{5} = 1{,}8$. =>

=> SO = среднему геометрическому проекций обоих катетов (SM и SN) на эту гипотенузу MN, т.е

$SO(h) = \sqrt{OM \cdot ON} = \sqrt{1{,}8 \cdot 3{,}2} = \sqrt{5{,}76} = 2{,}4$. =>

$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 2{,}4 = 8$.

Ответ: $SK = 2\sqrt{5}$; $SL = \sqrt{13}$; $V_{SMNKL} = 8$.

№2

$4 - \sin^2 x + \cos 4x + \cos 2x + 2 \cdot \sin 3x \cdot \sin 7x - \cos^2 7x = \cos^2\left(\frac{\pi k}{2021}\right).$

Упростим левую часть выражения:

$4 \sin^2 x + \cos 4x + \cos 2x + \cos(3x - 7x) - \cos(3x + 7x) - \cos^2 7x =$

$= 4 - \sin^2 x + \cos 4x + \cos 2x + \cos 4x - \cos 10x - \cos^2 7x = 4 -$

$- \sin^2 x + 2\cos 4x + \cos 2x - \cos 10x - \cos^2 7x = 4 - \sin^2 x + 2(2\cos^2 2x -$

$- 1) + 1 - \sin^2 x - \cos 10x - \cos^2 7x = 4 - \sin^2 x + 4(1 - 2\sin^2 x)^2 -$

$- 2 + 1 - 2\sin^2 x - \cos 10x - \cos^2 7x = 16 \sin^4 x - 19 \sin^2 x + 2 \sin^2 5x +$

$+ \sin^2 7x + 5 = f(x).$

$\sin^2 x \in [0; 1].$

$f(x) \in [1; 6].$

$1 \le \cos^2\left(\frac{\pi k}{2021}\right) \le 6$

$\frac{1 + \cos \frac{2\pi k}{2021}}{2} = 1$

$f(x) = \cos^2\left(\frac{\pi k}{2021}\right)$

$\cos^2\left(\frac{\pi k}{2021}\right) = 1$

$\cos^2\left(\frac{\pi k}{2021}\right) = 1.$

$\cos \frac{2\pi k}{2021} = 1$

$\frac{2\pi k}{2021} = 2\pi n.$

$k = 2021 \cdot n, \; n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $2021 \cdot n, n \in \mathbb{Z}.$