Место для скобы

003518

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	1
3.	Класс	11
4.	Фамилия	НУЖИНА
	Имя	МАРИЯ
	Отчество	АЛЕКСАНДРОВНА
5.	Дата рождения	Число: 21; Месяц: 10; Год: 2003
6.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	Томская область
7.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	село
8.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Асино)*	Бакчар
9.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ „Бакчарская СОШ"

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ______

Место для скобы

Шифр 003518

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
23б	3.04.21	Гендрина И.Ю.	[подпись]

1. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$, $x - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$

Существует ли такое x, что все три числа целые?

$x \neq 0$

7б

Если ~~$x \neq 0$~~ $x = 1$, то $x - \frac{1}{x} = 0$, целое,

а $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$ - нет, => $\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$ тоже (против-е)

если $x \neq 1$

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2020} = \frac{x^2 - x + 2020}{x(x^2+2020)}$

Рассмотрим кв. трёхчлен: $x^2 - x + 2021$, найдём его корень и разложим на множители

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2021 < 0$ => разложить на мн-ли нельзя => сократить нельзя => $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$ не целое => нет такого x, чтобы все три числа являлись целыми. ответ

2. $\sin x + \sin^3 x + 2020 \cdot \sin^5 x = \cos(2x) + 2020 \cdot \cos^5 2x$

Степени у sinx и cosx нечётные => соотн-е слагаемых равны.

Значит $\sin x = \cos(2x)$

$\sin x = 1 - 2\sin^2 x$

$2 + \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

7б

Замена: $\sin x = t$, $|t| \leq 1$

$2t^2 + t - 1 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 (3^2)$

$t_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$

$t_1 = -1$

$t_2 = \frac{1}{2}$

1	2	3	4	5
7	7	5	0	0

Возврат:

$\sin x = -1$; $x = -\frac{\Pi}{2} + 2\Pi n, n \in Z$

Место для скобы

Шифр 003518

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x_2 = (-1)^k + \Pi n, n \in Z$

или $x = \frac{\Pi}{6} + 2\Pi k, k \in Z$

$x = -\frac{5\Pi}{6} + 2\Pi k, k \in Z$

если $\sin x - \cos 2x + \sin^3 x - \cos^3 2x + 2020 \sin^5 x - 2020 \cdot \cos^5 2x = 0,$

$(\sin x - \cos(2x)) + 2(\sin x - \cos(2x))(\sin^2 x + 5\sin x = \cos(2x))$

ф-ла кубов

$+\cos^2(2x)) + 2020(\sin^5 x - \cos^5(2x)) = 0,$

$(\sin - \cos(2x))(1 + \sin^2 x + \sin\cos(2x) + \cos^2(2x)) + 2020(\sin^5 x - \cos^5(2x)) = 0,$

Используя метод оценки:

$2020(\sin 5x - \cos^5(2x)) = 0,$

$1 + \sin^2 x + \sin\cos(2x) + \cos^2 2x > 0, \Rightarrow$

$\sin x - \cos(2x) = 0$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

Замена:

$\sin x = t, \ |t| \le 1$

$2t^2 + t - 1 = 0$

$t_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$

$t_1 = 1 \quad t_2 = \frac{1}{2}$

Возврат:

$\sin x = -1$

$x_1 = -\frac{\Pi}{2} + 2\Pi k, k \in Z$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x_2 = (-1)^k \frac{\Pi}{6} + \Pi k, k \in Z$

Ответ: $x_1 = -\frac{\Pi}{2} + 2\Pi k$

$x_2 = (-1)^k + \frac{\Pi}{6} + \Pi k, \ k \in Z$

3. $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3, \ n > 1, n$ - целое

если $n = 2$, то $f(x) = x^2 + 5x + 3$

$D = 25 - 4 \cdot 3 = 13$

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 5\sqrt{13}}{2} \Rightarrow$

$x^2 + 5x + 3 = (x - \frac{5 + \sqrt{13}}{2})(x + \frac{5\sqrt{13}}{2})$

если $n > 2$, то корни ищем числа: $\pm 1, \pm 3$

если $x = 1$, то $(x^n + 5x^{n-1} + 3) : (x - 1)$

↓

5 б

Не все корни целые!

Разделим столбиком:

$$\begin{array}{l|l} x^n+5x^{n-1}+3 & x-1 \\ \hline x^n-x^{n-1} & x^{n-1}+6x^{n-2}+6x^{n-3} \\ \hline -6x^{n-1}+3 & \\ 6x^{n-1}-6x^{n-3} & \\ \hline -6x^{n-2}+3 & \\ 6x^{n-1}-6x^{n-3} & \\ \hline 6x^{n-3}+3 & \end{array}$$

$6\neq 3 \Rightarrow$

$x=1$ не явл. корнем $\Rightarrow$

если $x=-1$, то $(x^n+5x^{n-1}+3):(x+1)$

$$\begin{array}{l|l} x^n+5x^{n+3} & x+1 \\ \hline x^n+x^{n-1} & x^{n-1}+4x^{n-2}-4x^{n-3}+4x^{n-4} \\ \hline 4x^{n-1}+3 & \\ 4x^{n-2}-4x^{n-3} & \\ \hline 4x^{n-3}+3 & \\ 4x^{n-3}+4x^{n-4}-4x^{n-4}+3 & \end{array}$$

числовой коэфф. у x не равен 3 $\Rightarrow$ $x=-1$ не явл. корнем.

если $x=3$ $\Rightarrow (x^n+5x^{n-1}+3):(x-3)$

$$\begin{array}{l|l} x^n+5x^{n-1}+3 & x-3 \\ \hline x^n-3x^{n-1} & x^{n-1}+8x^{n-2}+24x^{n-3} \\ \hline 8x^{n-1}+3 & \\ 8x^{n-1}-24x^{n-2} & \\ \hline -24x^{n-2}+3 & \\ 24x^{n-2}-72x^{n-3} & \\ \hline 72x^{n-3}+3 & \end{array}$$

числ. коэфф. увелич-ся $\Rightarrow$ деление нацело не произойдёт)

если $x=-3$ $\Rightarrow$ $x^4+5x^{n-1}+3):(x\neq 3)$

$$\begin{array}{l|l} x^n+5x^{n-1}+3 & x+3 \\ \hline x^n+3x^{n-1} & x^{n-1}+2x^{n-2}-6x^{n-3}+18x^{n-4} \\ \hline 2x^n+3 & \\ 2x^{n-1}+6x^{n-2} & \\ \hline -6x^{n-2}\cancel{-18x^{n-3}}+3 & \\ 6x^{n-2}-18x^{n-3} & \\ \hline -54x^{n-4}+3 & \end{array}$$

Ответ:

модуль числовых коэфф-в увелич-ся $\Rightarrow$ деление не нацело $\Rightarrow$ $f(x)$ в виде произв-е при $n>2$ разложить нельзя. Только при $n>2$.