07025

Шифр

КРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

т	МАТЕМАТИКА
г	1
	11
я	НИКОЛАЕВА
	АНАСТАСИЯ
о	АЛЕКСАНДРОВНА
ждения	23 (Число) 03 (Месяц) 2005 (Год)
	Россия
пр: Томская обл., градская область)	Томская обл.
иципального образования *деревня, село, город)*	город
ный пункт *(пр: Томск, о, Псков)*	Томск
наименование тельного учреждения, м Вы обучаетесь в ремя	МАОУ СОШ №12

ие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e-mail льтатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ____________

Шифр 07025

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
28 б.	27.03.23	Хмылёва Т.Е.	[signature]

1	2	3	4	5
7	1	7	7	6

№4

Рассмотрим $f(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b$.

Найдём значение корней по т. Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{a}{a} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{b}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Преобразуем $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$$

~~Так~~ Тогда:

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = \cancel{(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)}$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}\right)$$

Подставим значения: $-1 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = -1$

7 б

№3

$$\frac{2a}{3(b+c)} + \frac{2b}{3(a+c)} + \frac{2c}{3(a+b)} \geq 1$$

$$\frac{2a}{3(b+c)} + \frac{2}{3} + \frac{2b}{3(a+c)} + \frac{2}{3} + \frac{2c}{3(a+b)} + \frac{2}{3} \geq 3$$

$$\frac{2(a+b+c)}{3(b+c)} + \frac{2(a+b+c)}{3(a+c)} + \frac{(a+b+c)}{(a+b)} \geq 3 \quad \Big| \cdot \frac{3}{2(a+b+c)}$$

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$$

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \geq \frac{9}{(a+b) + (a+c) + (b+c)}$$

Пусть $b + c = z$, $a + b = x$, $a + c = y$ $\rightarrow$

скобы

Шифр 07025

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\geqslant\frac{9}{x+y+z}\quad\Big|\cdot(x+y+z)$$

$$\cancel{\frac{x+z}{y}}+\cancel{\frac{x+y}{z}}\quad\frac{x+y+z}{y}+\frac{x+y+z}{z}+\frac{x+y+z}{x}\geqslant 9$$

$$\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}\geqslant 6$$

$$\cancel{x+z}\quad\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\geqslant 6$$

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\geqslant 6$$

Рассмотрим ~~...~~ $\frac{x}{y}$ и $\frac{y}{x}$. По неравенству о средних:

$$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{x\cdot y}{y\cdot x}}\Rightarrow\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$$

7б

Аналогично:

$$\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\geqslant 2\quad и\quad\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geqslant 2\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ исходное неравенство выполняется для любых положительных чисел a, в, c.

№1

$$2x^2+2x^2z^2+z^2+7y^2-42y+33=0$$

$$2x^2+2x^2z^2+z^2=-7y^2+42y-33$$

Пусть $f(x,z)=2x^2+2x^2\cdot z^2+z^2$, $f(x,z)\geqslant 0$ и чётная, т.к. сумма квадратов.

Пусть $g(y)=-7y^2+42y-33$ – парабола, ветви вниз. Необходимо, чтобы $g(y)$ было $\geqslant 0$. Найдём вершины параболы

$$y_1=\frac{42-\sqrt{42^2-33\cdot 7\cdot 4}}{14}=3-\frac{\sqrt{210}}{7}$$

$$y_2=\frac{42+\sqrt{42^2-33\cdot 7\cdot 4}}{14}=3+\frac{\sqrt{210}}{7}$$

Т.к. у параболы ветви вниз, то $g(y)\geqslant 0$ при $y\in[y_1;y_2]$

$\Rightarrow$ ~~g(y)~~ целочисленные значения y – $\{1,2,3,4,5.\}$ $\rightarrow$

Шифр 07025

y	$g(y)$
1	$-7+42-33=2$
2	$-7\cdot4+42\cdot2-33=23$
4	$-7\cdot16+42\cdot4-33=23$
3	$-7\cdot9+42\cdot3-33=30$
5	$-7\cdot25+42\cdot5-33=2$

Чтобы исходное уравнение имело целочисленные решения, нужно у какого-нибудь из уравнений было целочисленное решение.

$$\begin{cases} 2x^2+2x^2\cdot z^2+z^2=2 \\ 2x^2+2x^2\cdot z^2+z^2=23 \\ 2x^2+2x^2\cdot z^2+z^2=30 \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение вида $2x^2+2x^2\cdot z^2+z^2=a$

$$z^2=\frac{a-2x^2}{2x^2+1}$$

Числитель положительны при $x^2\le\frac{a}{2}$ где $a=2$, при 23 при $a=30$ $\Rightarrow$ $x^2\le15$ $\Rightarrow$ достаточно рассмотреть 0, ±1, ±2, ±3. Т.к $f(x,z)$ — чётная, то достаточно рассмотреть положительные значения

При $x=0$

$$\begin{cases} z^2=2 \\ z^2=23 \\ z^2=30 \end{cases}$$ целочисленных решений нет

При $x=2$

$$\begin{cases} 9z^2=-6 \\ 9z^2=15 \\ 9z^2=22 \end{cases}$$ целочисленных решений нет

При $x=1$

$$\begin{cases} 3z^2=0 \\ 3z^2=21 \\ 3z^2=28 \end{cases} \quad \begin{cases} z^2=0 \\ z^2=7 \\ z^2=\frac{28}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

исходное уравнение имеет смысл при

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}$$

Т.к $g(y)=2$ при $y=5$ следующие значения:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=5 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=5 \\ z=0 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ z=0 \\ y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=5 \\ z=0 \end{cases}$

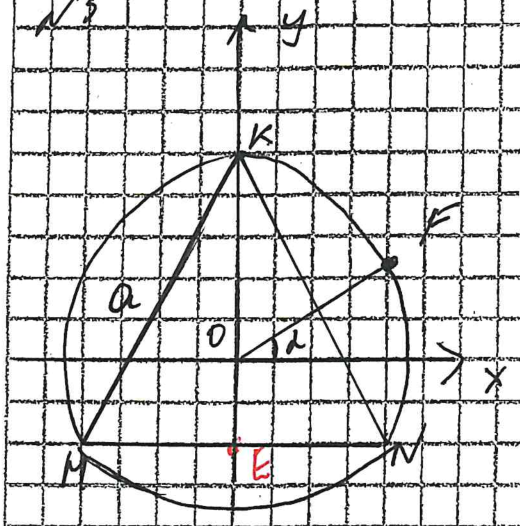
При $x=3$

$$\begin{cases} 19z^2=-16 \\ 19z^2=5 \\ 19z^2=12 \end{cases}$$ целочисленных решений нет

7 / 7

Шифр 07025

№5



Пусть O – начало системы координат.

Точка F имеет координаты $F(r\cos\alpha;\ r\sin\alpha)$, где r – радиус окружности, α – угол между Ox и радиусом OF.

Найдем координаты вершин $\triangle MNK$: $K(0;\ r)$

$M\left(-\frac{\sqrt3}{2}r;\ -\frac{r}{2}\right)$

$N\left(\frac{\sqrt3}{2}r;\ -\frac{r}{2}\right)$

$OK = r = \frac{2}{3}KE = \frac{2}{3}a\sin 60° \Rightarrow$ (a – сторона $\triangle MNK$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow a = \sqrt3 r \Rightarrow ME = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt3}{2}r$ ✓, $OE = \frac{1}{3}EK = \frac{r}{2}$ ✓

Воспользуемся формулой нахождения расстояния между двумя точками в системе координат.

$|KF|^2 = |\overline{KF}|^2 = (r\cos\alpha)^2 + (r\sin\alpha - r)^2$

Аналогично: $|FN|^2 = |\overline{FN}|^2 = \left(\frac{\sqrt3}{2}r - r\cos\alpha\right)^2 + \left(-\frac{r}{2} - r\sin\alpha\right)^2$

$|FM|^2 = |\overline{FM}|^2 = \left(-\frac{\sqrt3}{2}r - \cos\alpha\right)^2 + \left(-\frac{r}{2} - r\sin\alpha\right)^2$

$FM^4 + FN^4 + FK^4 = (|FM|^2)^2 + (|FN|^2)^2 + (|FK|^2)^2$

Упрощая, получаем, что $FM^4 + FN^4 + FK^4 = 18r^4$

$\Rightarrow FM^4 + FN^4 + FK^4$ не зависит от выбора точки F.

6б

№2

$2^{\lg(x^2-2023)} - \lg 2^{(x^2-2022)} = 0$

$2^{\lg(x^2-2023)} = \lg 2^{(x^2-2022)}$

$\lg 2^{\lg(x^2-2023)} = \lg\left(\lg 2^{(x^2-2022)}\right)$

$\lg(x^2-2023)\cdot\lg 2 = \lg\left((x^2-2022)\cdot\lg 2\right)$

$\lg 2 + \lg(x^2-2023) = \lg(\lg 2) + \lg(x^2-2022)$ →

1б

Шифр 7025

$lg(x^2-2023) - lg(x^2-2022) = lg(lg 2) - lg 2$

$lg\left(\frac{x^2-2023}{x^2-2022}\right) = lg\left(\frac{lg 2}{2}\right)$

$\frac{x^2-2023}{x^2-2022} = \frac{lg 2}{2} \quad | \cdot 2$

$\frac{2(x^2-2023)}{x^2-2022} = lg 2.$