Место для скобы

03572

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	1
3.	Класс	11
4.	Фамилия	НИКИТИН
	Имя	МАКСИМ
	Отчество	НИКОЛАЕВИЧ
5.	Дата рождения	Число: 10; Месяц: 01; Год: 2004
6.	Страна	РФ
7.	Регион *(пр: Томская обл., Калининградская область)*	Республика Саха (Якутия)
8.	Вид муниципального образования *(пр: пгт, деревня, село, город)*	~~[illegible]~~ город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	~~[illegible]~~ Якутск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь в данное время	Государственное бюджетное нетиповое общеобразовательное учреждение "Республиканский лицей-интернат"

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ____________

Место для скобы

Шифр 03572

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
22		Емельянова	Емел

1	2	3	4	5	Σ
3	7	7	-	5	22

№ 1 $S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$. Путем подбора было найдено $S_n = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$ докажем эту формулу, методом индукции.

Пусть $n=1$ $\frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$; Пусть $n=k$ (1) $\frac{1}{2!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)!-1}{(n+1)!}$

(2) Пусть $n = k+1$ $\frac{1}{2!} + \dots + \frac{(k+1)}{(k+2)!} = \frac{(k+2)!-1}{(k+2)!}$ - заменим предыдущие слагаемые на их сумму. $\frac{(k+1)!-1}{(k+1)!} + \frac{(k+1)}{(k+2)!} = \frac{(k+2)!-1}{(k+2)!}$

Вычислим левую часть. $\frac{(k+1)!-1}{(k+1)!} + \frac{(k+1)}{(k+2)!} = \frac{(k+1)!(k+2)-k-2+k+1}{(k+2)!} = \frac{(k+2)!-1}{(k+2)!}$ что равно $\frac{(k+2)!-1}{(k+2)!}$. Формула подтверждена.

$S_{2021} = \frac{2021!-1}{2021!} \Rightarrow 2022!\left(\frac{2021!-1}{2021!} - 1\right) = \frac{2022!(-1)}{2021!} = -2022$

Ответ: -2022

№ 2 $4 - \sin^2 x + \cos 4x + \cos 2x + 2\sin 3x \cdot \sin 7x - \cos^2 7x = \cos^2\left(\frac{\pi x}{2021}\right)$

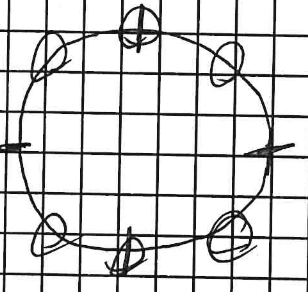
$2 + \cos^2 x + \cos 4x + \cos 2x + 2\sin 3x \sin 7x + \sin^2 7x = \cos^2\left(\frac{\pi x}{2021}\right)$

$1 + \cos^2 x + 2\cos x \cos 3x + \cos^2 3x + \sin^2 3x + 2\sin 3x \sin 7x + \sin^2 7x = \cos^2\left(\frac{\pi x}{2021}\right)$

$1 + (\cos x + \cos 3x)^2 + (\sin 3x + \sin 7x)^2 = \cos^2\left(\frac{\pi x}{2021}\right)$ $|\cos x| \le 1$

$x^2 \ge 0$ значит $\cos x + \cos 3x$ и $\sin 3x + \sin 7x$ должны быть равны нулю, иначе ~~нет решений~~ ни решений справа для косинуса. А косинус может быть равен $\{-1; 1\}$

$$\begin{cases} \cos 3x + \cos x = 0 \\ \sin 3x + \sin 7x = 0 \\ \cos^2\left(\frac{\pi k}{2021}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos 2x \cos x = 0 \\ 2\sin 5x \sin 2x = 0 \\ \cos^2\left(\frac{\pi k}{2021}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{2} \\ x = \frac{\pi n}{5} \end{array}\right. \\ \cos^2 \frac{\pi n}{2021} = 1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$



ясно, что $x = \frac{\pi k}{5}$ не объединено с другими сериями, иначе — x для синуса, кружки — x для косинуса. Из окружности видно, что $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

$\cos \frac{\pi k}{2021} = 1$ $\qquad$ $\cos \frac{\pi k}{2021} = -1$

$\frac{\pi k}{2021} = 2\pi n'$ $\qquad$ $\frac{\pi k}{2021} = \pi + 2\pi n'$

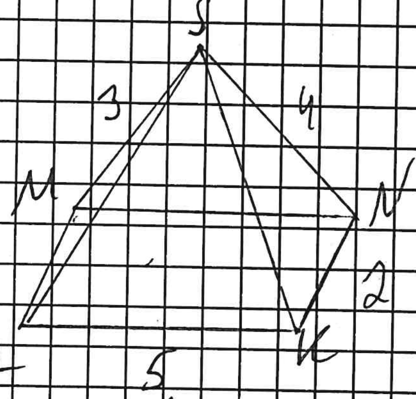
$\Downarrow$

$\frac{\pi k}{2021} = \pi n'$

$k = 2021 n'$ $\quad n' \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $k = 2021 n'$, где $(n' \in \mathbb{Z})$

№ 5



$MNKL$ — трапеция $MN = KL = 5$

$NK = ML = 2$

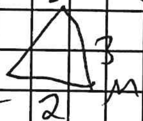
$SM = 3$ $SN = 4$ $\qquad$ $V = \frac{1}{3} SH$

S — конст. H — переменная, значит $H\uparrow = V\uparrow$.

~~H максимален, тогда, когда из вершины ребра~~

H максимален, если ~~он~~ его проекция ~~на~~ лежит на окружности трапеции, ~~т.е.~~ ~~иначе~~ если же она лежит вне трапеции, то боковые ребра будут наклонены, и очевидно, что они будут меньше.

~~Пусть H ∈ △SML, где △SML ⊥ MNKL.~~



~~, видно, что H max здесь равен 3. т.к. ML = 2, H = SM, иначе SM наклонная, и тогда в меньшем случае SM ⊥ ML. $H_{max} = 3$, но SN не может т.к. SN = 4, а MN = 5~~

~~Пусть H ∈ △SNK где △SNK ⊥ MNKL. тогда аналогично H max = 4, но SM = 3, а MN = 5, и SM не может~~

~~Пусть H ∈ △SLK, но видно, что SM и SN должны ... H (т.к. 2)~~

~~будет меньше 4, 3.~~

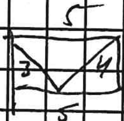
~~Пусть H ∈ △SMN. очевидно, что SM и SN < 5, значит H лежит между~~

H не может лежать на стороне ML и NK т.к. SM, SN < 5, это значит, что ребра не смогут добраться до других вершин, т.е. такое построение невозможно, ~~значит H не может лежать~~

~~на стороне LK, т.к. значение пирамиды будут ...~~

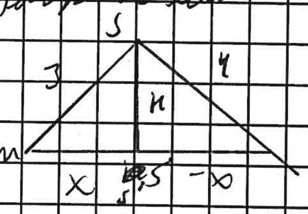
~~H ∈ △SMN ..., т.к. если H ∈ SLK, то~~

Пусть H лежит на стороне LK, но SM = 3 SN = 4, а LK = 5. Значит это будет прямоугольный треугольник



, т.е H = 0.

Тогда H лежит в стороне SMN.



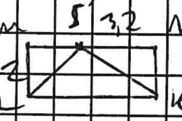
$MS' = x$ $S'N = 5 - x$

$S'S^2 = 9 - x^2 = 16 - 25 + 10x - x^2$

$9 = -9 + 10x$

$x = 1{,}8.$ $SS'^2 = 9 - 3{,}24 = 5{,}76 = 2{,}4^2$

$SS' = 2{,}4.$ $V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 2{,}4 = 8$



$S'K^2 = 14{,}24$ $SK^2 = 2{,}4^2 + 14{,}24 = 20$ ⇒ $SK = \sqrt{20} = 2\sqrt5$

$S'L^2 = 7{,}24$ $SL^2 = 2{,}4^2 + 7{,}24 = 13$ $SL = \sqrt{13}$

Ответ: $V = 8$. $SL = \sqrt{13}$ $SK = 2\sqrt5$

Место для скобы

Шифр 03572

№3

$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

$\left(1-\frac{2}{p(n)}\right)=\frac{(n+1)(n+2)-2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+3n+2-2}{n^2+3n+2}=\frac{n^2+3n}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$

пусть $n=k$

следующий член будет $n=k+1$.

следующий за ним $n=k+2$

и так далее.

$$\frac{k(\cancel{k+3})}{(\cancel{k+1})(k+2)}\cdot\frac{(\cancel{k+1})(\cancel{k+4})}{(\cancel{k+2})(\cancel{k+3})}\cdot\frac{(\cancel{k+2})(k+5)}{(k+3)(\cancel{k+4})}\cdot\ldots\cdot\frac{(k+m)(k+m+3)}{(\cancel{k+m+1})(\cancel{k+m+2})}\cdot\frac{(\cancel{k+m+1})(k+m+4)}{(k+m+2)(\cancel{k+m+3})}$$

Все это в итоге будет равно $\frac{k}{k+2}\cdot\left(\frac{k+m+4}{k+m+2}\right)$

$\frac{k}{k+2}$ = ~~при~~ минимален $\Rightarrow k=1$ $\frac{k}{k+2}=\frac{1}{3}$, а $\frac{k+m+4}{k+m+2}$ = наименее минимальн. значит равен $\left(1-\frac{2}{p(2022)}\right)=\frac{(k+2021)(k+2023)}{(k+2021)(k+2022)}=\frac{2024}{2022}$

$k=1$

сокращение по наименьшему ... т.к. предыдущие минимальные.

$\frac{k}{(k+2)}\cdot\left(\frac{k+m+4}{k+m+2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2024}{2022}=\frac{1012}{3\cdot1011}=\frac{1012}{3033}$

Ответ: произведение равно $\frac{1012}{3033}$