Место для скобы

003963

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	1
3.	Класс	10
4.	Фамилия	НЕВЕРОВА-СИМЧИТ
	Имя	ЕЛЕНА
	Отчество	ВАЛЕРЬЕВНА
5.	Дата рождения	Число: 27; Месяц: 09; Год: 2005
6.	Страна	Россия
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	Республика Тыва
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Кызыл
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	ГАНООРТ "ГЛРТ" (Государственная автономная нетиповая общеобразовательная организация Республики Тыва „Государственный лицей Республики Тыва")

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ____________

Место для скобы

Шифр 003963

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
32	30.03.21	Коряжкина Е.Е.	[подпись]

$\boxed{№3}$ $f(x)$ - квадратный трёхчлен $\Rightarrow f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$

$$\left.\begin{aligned} f(0)&=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=c\\ f(1)&=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c\\ f(2)&=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=4a+2b+c\\ f(3)&=a\cdot 3^2+b\cdot 3+c=9a+3b+c\end{aligned}\right\}$$

Вычислим $f(0), f(1), f(2)$ и $f(3)$, подставив соответствующие значения x в $f(x)=ax^2+bx+c$

1	2	3	4	5	Σ
5	6	7	7	7	32

По условию дано, что $f(0)+f(1)=0$ и $f(2)+f(3)=0$:

$$\begin{cases} c+a+b+c=0\\ 4a+2b+c+9a+3b+c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c+a+b=0\\ 13a+5b+2c=0\end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения системы первое и получим:

$$13a+5b+2c-2c-a-b=0 \Rightarrow 12a+4b=0 \Rightarrow 3a+b=0$$

Выразим из полученного равенства коэффициент b: $b=-3a$.

Пусть x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $f(x)=2021$. Максимум у квадратного уравнения может быть два различных корня, поэтому и переменных две: x_1 и x_2. $f(x)=2021$ представим в виде

$$f(x)=ax^2+bx+c=2021 \Rightarrow ax^2+bx+c-2021=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{(c-2021)}{a}=0$$

По теореме Виета для приведённого уравнения имеем, что $x_1\cdot x_2=\frac{(c-2021)}{a}$, что нас мало интересует, и сумма корней уравнения $f(x)=2021$:

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$. А мы знаем, что $b=-3a$. Подставим: $x_1+x_2=\frac{3a}{a}$.

Так как $a\neq 0$, то: $x_1+x_2=3$, что и требовалось найти.

Ответ: Сумма корней уравнения $f(x)=2021$ равна 3.

x

$\boxed{№4}$ Доказательство:

Предположим, что $\sqrt[2021]{2019\cdot 2020^{-1}}+\sqrt[2021]{2020\cdot 2018^{-1}}\leq 2$. Преобразуем неравенство: $\sqrt[2021]{\frac{2019}{2020}}+\sqrt[2021]{\frac{2020}{2018}}\leq 2$, т.к. число в (-1) степени равно обратному числу этого числа $(\exists x\in\mathbb{R},\ x^0=1,\ x^1=x$ и $x^{-1}=\frac{x^0}{x^1}=x^{0-1}=\frac{1}{x^1}=\frac{1}{x})$

Попробуем преобразовывать наше неравенство.

$$\frac{\sqrt[2021]{2019}}{\sqrt[2021]{2020}}+\frac{\sqrt[2021]{2020}}{\sqrt[2021]{2018}}\le 2 \Rightarrow \frac{\sqrt[2021]{2019}\cdot\sqrt[2021]{2018}+\sqrt[2021]{2020}\cdot\sqrt[2021]{2020}}{\sqrt[2021]{2020}\cdot\sqrt[2021]{2018}}\le 2$$

Ни $\sqrt[2021]{2018}\ne 0$, ни $\sqrt[2021]{2020}\ne 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt[2021]{2019\cdot 2018}+\sqrt[2021]{2020\cdot 2020}\le 2\cdot\sqrt[2021]{2020\cdot 2018}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[2021]{2020}\cdot\left(\sqrt[2021]{2020}-\sqrt[2021]{2018}\right)\le \sqrt[2021]{2018}\left(\sqrt[2021]{2020}-\sqrt[2021]{2019}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[2021]{2020}\cdot\left(\sqrt[2021]{2020}-\sqrt[2021]{2018}\right)}{\sqrt[2021]{2018}\cdot\left(\sqrt[2021]{2020}-\sqrt[2021]{2019}\right)}\le 1,$$ т.к. $\sqrt[2021]{2018}\ne 0$ и $\left(\sqrt[2021]{2020}-\sqrt[2021]{2019}\right)\ne 0\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\sqrt[2021]{2020}}{\sqrt[2021]{2018}}}_{\text{I-ый множитель}}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt[2021]{2020}-\sqrt[2021]{2018}}{\sqrt[2021]{2020}-\sqrt[2021]{2019}}}_{\text{II-ой множитель}}\le 1$$

У нас первый множитель больше ~~либо равен~~ 1, т.к.: $\sqrt[2021]{\frac{2020}{2018}}>1\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2020}{2018}>1$, т.к. степень нечётная. Второй множитель тоже больше ~~либо равен~~ 1, потому что $\sqrt[2021]{2018}<\sqrt[2021]{2019}$, а значит $\sqrt[2021]{2020}-\sqrt[2021]{2018}>\sqrt[2021]{2020}-\sqrt[2021]{2019}$. Получается оба множителя больше ~~либо~~ 1, а значит и их произведение больше $1\Rightarrow \frac{\sqrt[2021]{2020}}{\sqrt[2021]{2018}}\cdot\frac{\sqrt[2021]{2020}-\sqrt[2021]{2018}}{\sqrt[2021]{2020}-\sqrt[2021]{2019}}>1$, а значит наше предположение неверно, потому что мы столкнулись с противоречием.

Получается, $\sqrt[2021]{2019\cdot 2020^{-1}}+\sqrt[2021]{2020\cdot 2018^{-1}}>2$

чтд

$\boxed{№2}$ Предположим, что $y=0$, т.е. пусть у нас $y=0$, тогда система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} x\cdot z=0\\ 2\cdot x\cdot z=0\\ 0=0\end{cases}$$

То есть при $y=0$ у нас либо $x=0$, либо $z=0$ должно быть обязательно. Теперь рассмотрим случай, когда $y\ne 0$. Тогда третье уравнение системы мы можем поделить на y и получим: $z-2x=6$. Выразим z:

$z=2x+6$ (1)

Место для скобы

Шифр 003963

Подставим тогда (1) выражение во второе и первое уравнения системы:

$$\begin{cases} x(2x+6)+5y(2x+6)-6xy=-2y \\ 2x(2x+6)+9y(2x+6)-9xy=-12y \end{cases};$$ Преобразуем:

$$\begin{cases} 2x^2+6x+10xy+30y-6xy+2y=0 \\ 4x^2+12x+18xy+54y-9xy+12y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+6x+4xy+30y+2y=0 \quad |\cdot 2 \\ 4x^2+12x+9xy+54y+12y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2+12x+8xy+60y+4y=0 \\ 4x^2+12x+9xy+54y+12y=0 \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое:

$$4x^2-4x^2+12x-12x+9xy-8xy-64y+66y=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy+2y=0$$

Так как $y\neq 0$, то мы можем поделить текущее выражение на y и получить:

$$x+2=0 \Rightarrow \underline{x=-2}$$

Подставим значение x в (1) выражение: $\underline{z=2\cdot(-2)+6=2}$

Теперь подставим уже известные нам значения x и z в первое уравнение системы:

$$-2\cdot 2+5y\cdot 2-6\cdot(-2)\cdot y=-2y$$

$$-4+10y+12y+2y=0$$

$$24y=4$$

$$\underline{y=\tfrac{1}{6}}$$

В итоге получаем следующие решения данной системы уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x=0;\ y=0;\ z\in R; \\ x\in R/0;\ y=0;\ z=0; \\ x=-2;\ y=\tfrac{1}{6};\ z=2; \end{array}\right.$$

Ответ: $(x,y,z)\in(0,0,R)\cup(R/0,0,0)\cup(-2;\tfrac{1}{6};2)$.

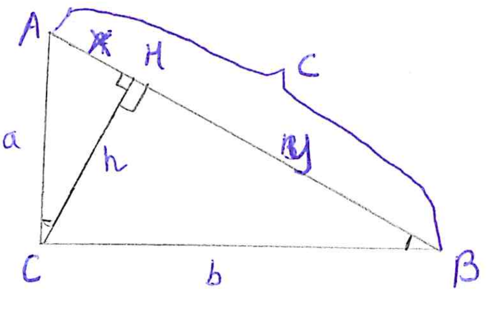
$\boxed{№5}$ Дано:

a и b - катеты (AC и CB)

c - гипотенуза (AB)

h - высота к гипотенузе (CH)

Решить: возможно ли, что $(c+h)<(a+b)$



Место для скобы

Шифр

Решение:

Гипотенуза c делится высотой h на два отрезка. Назовём их x и y, на рисунке это AH и BH соответственно. Точкам даны буквенные названия для удобства записи подобия треугольников.

Итак, у нас $\triangle ABC \approx \triangle ACH$ по двум углам ($\angle AHC = \angle ACB = 90°$ и $\angle A$ - общий).

Запишем соотношения сторон: $\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{CH}{BH}$, т.е. $\frac{a}{c} = \frac{x}{a} = \frac{h}{b} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = x \cdot c$ (1)

Также $\triangle ABC \approx \triangle CBH$ по двум углам ($\angle BHC = \angle ACB = 90°$ и $\angle B$ - общий).

Соотношения сторон: $\frac{CH}{AC} = \frac{BH}{BC} = \frac{BC}{AB}$, т.е. $\frac{h}{a} = \frac{y}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = y \cdot c$ (2)

И ещё $\triangle CBH \approx \triangle ACH$ по двум углам ($\angle AHC = \angle BHC = 90°$ и $\angle CBH = \angle ACH$, т.к. $\angle CBH = 90° - \angle A$ и $\angle ACH = 90° - \angle A$). Соотношения сторон:

$\cancel{\frac{AH}{AC} = \frac{CH}{BC} = \frac{AC}{BH}}$ $\frac{AC}{BC} = \frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}$, т.е. $\frac{a}{b} = \frac{x}{h} = \frac{h}{y} \Rightarrow h^2 = x \cdot y$ (3)

(~~В треугольниках $\triangle AHC$ и $\triangle CHB$: $AC < AH + CH$ и $BC < CH + BH$, по теореме о неравенстве в треугольниках, и тому же, гипотенуза должна быть меньше суммы катетов. Т.е. $a < x + h$ и $b < y + h$.~~)

Предположим, что $(c+h) < (a+b)$. Преобразуем, подставив (1), (2) и (3):

$c + \sqrt{x \cdot y} < \sqrt{c \cdot x} + \sqrt{c \cdot y}$. Возведём в квадрат: $c^2 + x \cdot y + 2 \cdot c\sqrt{xy} < cx + c \cdot y + 2 \cdot c\sqrt{xy}$

~~$c + \sqrt{xy} < \sqrt{c} \cdot \sqrt{x+y}$. Воз~~ Получаем:

$c^2 + xy < c \cdot (x+y)$

А у нас $x+y$ это и есть отрезок c:

$c^2 + xy < c \cdot c \Rightarrow c^2 + xy < c^2 \Rightarrow xy < 0$, что невозможно.

~~$c + \sqrt{xy} < \sqrt{c} \cdot \sqrt{c} \Rightarrow c + \sqrt{xy} < c \Rightarrow \sqrt{xy} < 0$, что невозможно.~~

Мы столкнулись с противоречием, значит, наше предположение неверно. Получается, невозможно чтобы $(c+h) < (a+b)$.

Ответ: Нет, невозможно.

+

№1 Предположим, что такое число x существует. Значит, $(\sqrt{x^2+2021} - x) \in \mathbb{Z}$ и $(2x - \sqrt{x^2+2021}) \in \mathbb{Z}$. Тогда и сумма двух целых чисел должна быть целой:

$$(\sqrt{x^2+2021} - x + 2x - \sqrt{x^2+2021}) \in \mathbb{Z}$$

Место для скобы

Шифр

Преобразуем и получим:

$x \in \mathbb{Z}$

Получается, что если мы хотим чтобы при данных числа были целыми, то у нас x тоже должно быть целым. Значит x существования которого мы предположили - целое. Если $x \in \mathbb{Z}$ и $(\sqrt{x^2+2021}-x) \in \mathbb{Z}$, то и $\sqrt{x^2+2021} \in \mathbb{Z}$. Значит, в $(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2021}) \in \mathbb{Z}$ у нас $\sqrt{x^2+2} \in \mathbb{Z}$. Попытаемся найти хотя бы одно x, ~~при кот~~ $\in \mathbb{Z}$, при котором $\sqrt{x^2+2} \in \mathbb{Z}$. Пусть у нас $\sqrt{x^2+2}=a$, тогда $a \in \mathbb{Z}$.
Возведем равенство в квадрат: $x^2+2=a^2$, т.е: $a^2-x^2=2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (a-x)(a+x)=2$. Так как $x \in \mathbb{Z}$ и $a \in \mathbb{Z}$, то и $(x-a) \in \mathbb{Z}$ и $(x+a) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Возможны 4 случая: 1) $a-x=1 \cup a+x=2$

2) $a-x=2 \cup a+x=1$

3) $a-x=-1 \cup a+x=-2$

4) $a-x=-2 \cup a+x=-1$

Но ни первый, ни второй, ни третий, ни четвёртый случаи невозможны при $a \in \mathbb{Z}$ и $x \in \mathbb{Z}$. Получается при $x \in \mathbb{Z}$ у нас $\sqrt{x^2+2} \notin \mathbb{Z}$. Мы столкнулись с противоречием. Значит, наше предположение неверно и подходящего числа x не существует.

Ответ: Нет, такое число x не существует.

$\pm$