ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004447

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет		Орг. документы
2.	Вариант		Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс		11
4.	Фамилия		М О Т О Р И Н
	Имя		Г О Р Д Е Й
	Отчество		П А В Л О В И Ч
5.	Дата рождения		0 6 (число) 1 1 (месяц) 2 0 0 3 (год)
6.	Страна		Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)		Кемеровская область - Кузбасс
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)		Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)		Новокузнецк
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь		МБНОУ Лицей №84 им.В.А.Власова

Место для скобы

№2

Шифр 004447

$$\sin(2x) + \sin^5(2x) + 2020\cdot\sin^9(2x) = \cos(4x) + \cos^5(4x) + 2020\cos^9(4x)$$

Рассмотрим функции:

1) $f(t) = f(\sin(2x))$ $\quad f(t) = t + t^5 + 2020t^9 \quad f'(t) = 1 + 5t^4 + 9\cdot 2020\cdot t^8$ } $f(t)>0$

2) $f(g) = f(\cos(4x))$ $\quad g(t) = f(g) = g + g^5 + 2020g^9 \quad f'(g) = 1 + 5g^4 + 9\cdot 2020\cdot g^8$ } $f(g)>0$

$\Downarrow$?

Отсюда следует, что

$f(t) = f(g)$

$f(\sin(2x)) = f(\cos(4x))$

$\Downarrow$

$\sin(2x) = \cos(4x)$

$\sin(2x) = \cos^2(2x) - \sin^2(2x)$

$\sin(2x) = 1 - 2\sin^2(2x)$

$2\sin^2(2x) + \sin(2x) - 1 = 0$

1	2	3	4	5
7	6	7	7	7

Замена

$a = \sin(2x)$, $a \in [-1, 1]$

$2a^2 + a - 1 = 0$

Итого: 34 балла

$D = 1 + 8 = 9 > 0$, 2 корня

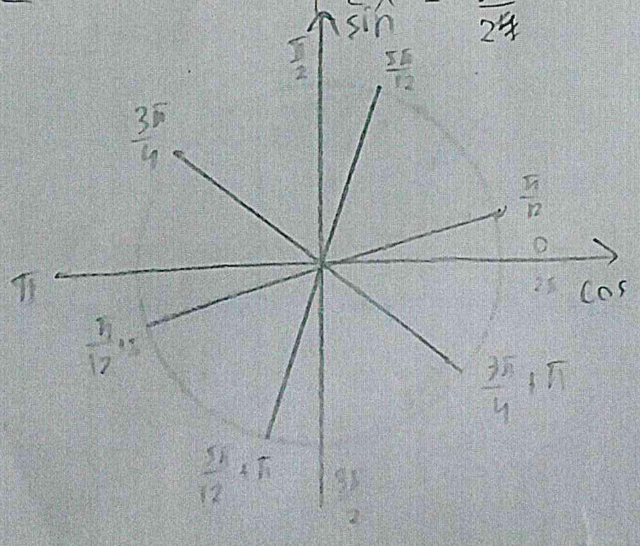
$a = \frac{-1+3}{4} = +\frac{1}{2}$

6б

$a = \frac{-1-3}{4} = -1$

Возвращаемся к замене

$$\left\{\begin{array}{l} \sin 2x = \frac{1}{2} \\ \sin 2x = -1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right. \\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in Z \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in Z \end{array}\right. \\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z \end{array}\right.$$



$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$

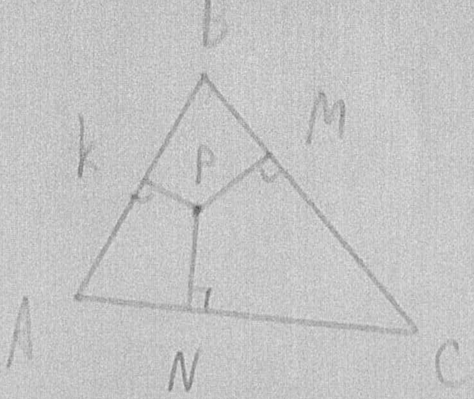
Ответ $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$

Место для скобы

№5

Шифр 004447

Найти т. P, для которой $\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$ - минимальна



Решение

1) Пусть $a = AB$, $в = BC$, $c = AC$

7б

2) Исследуем неравенство о среднем:

$$\frac{в}{PM}+\frac{c}{PN}+\frac{a}{PK} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{abc}{PM\cdot PN\cdot PK}},$$ т.е. $\frac{в}{PM}+\frac{c}{PN}+\frac{a}{PK}=\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$

будет минимальна в том случае, когда $a = в = c$ (т.е. $\triangle ABC$ - равносторонний треугольник) и $PM = PN = PK = r$ (r - радиус вписанной окружности), тогда $\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$ будет принимать минимальное значение, когда P - центр вписанной окружности в равностороннем треугольнике ABC.

Ответ: сумма будет минимальной, если P - центр вписанной окр-ти

Место для сгиба

№1

Шифр 04447

$$\frac{x^3}{m+x\cdot 2020^{\frac{4}{3}}} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x^3+x\cdot 2020^{\frac{4}{3}}} - \frac{x\cdot 2020^{\frac{4}{3}}}{m+x^3}$$

Пусть $a = x^3$

(Замена) $b = x\cdot 2020^{\frac{4}{3}}$

1) $\frac{a}{m+b} + \frac{b}{m+a} + \frac{m}{a+b} \le \frac{3}{2}$

2) Данное неравенство будет принимать минимальное значение при $a = b = c$:

$$\frac{a}{a+a} + \frac{a}{a+a} + \frac{a}{a+a} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{m+b} + \frac{b}{m+a} + \frac{m}{a+b} \ge \frac{3}{2}$$

3) Из п.1 и п.2:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a}{m+b} + \frac{b}{m+a} + \frac{m}{a+b} \le \frac{3}{2} \\ &\frac{a}{m+b} + \frac{b}{m+a} + \frac{m}{a+b} \ge \frac{3}{2} \end{aligned}\right\} \frac{a}{m+b} + \frac{b}{m+a} + \frac{m}{a+b} = \frac{3}{2} \text{ - мин знач}$$

$$\Downarrow$$

$$a = b = m$$

Возвр. к замене

7 б

$$\left.\begin{aligned} &x^3 = x\cdot 2020^{\frac{4}{3}} = m \\ &x^2 = 2020^{\frac{4}{3}} \Rightarrow x = 2020^{\frac{2}{3}} \\ &m = x^3 \end{aligned}\right\} m = \left(2020^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2020^2 = 4080400$$

$$\begin{array}{r} \times\ 2020 \\ 2020 \\ \hline +\ 4040 \\ 4040 \\ \hline 4080400 \end{array}$$

Ответ: $m = 4080400$

Место для скобы

Рассмотрим

Шифр

№1

1) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$ 2) $x-\frac{1}{x}$ 3) $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$

1-ое и 3-ье числа противоположны; если одно из них будет целым, то и другое будет целым, но с другим знаком
Тогда:

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}=b$, где $b\in Z$

$x-\frac{1}{x}=a$, где $a\in Z$

$\frac{1}{x}=x-a$, где $\frac{1}{x}$ - гипербола, а $x-a$ - прямая

Поскольку $\frac{1}{x}$ - симметрична относительно начала координат $(0;0)$, то можно рассматривать только $x>0$.

Пусть $x=t^{\lambda}$, $\lambda\in N$

Подставляем значение x в 1-ое уравнение:

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}=\frac{1}{t^{\lambda}}-\frac{1}{t^{2\lambda}+2021}=b$ $\quad\frac{1}{t^{\lambda}}=b+\frac{1}{t^{2\lambda}+2021}$

$\frac{1}{t^{2\lambda}+2021}=\frac{1-b\cdot t^{\lambda}}{t^{\lambda}}\Rightarrow t^{\lambda}=(1-bt^{\lambda})(t^{2\lambda}+2021)$

Замена

$r=t^{\lambda}$, $r>0$

$r=(1-b\cdot r)(r^2+2021)$ $\quad r-(1-b\cdot r)(r^2+2021)=r-r^2-2021+br^3+2021br=0$

$br^3-r^2+r+2021br-2021=0$

Если это кубическое уравнение будет иметь корни, то $r_1+r_2+r_3=-1$ (по Т. Виета), но т.к. $r>0$, то корней не существует

$\Downarrow$

Ответ: не существует такого числа, при котором все три явл-ся целыми

7б