ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА
ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004448
Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	М О Р Ы Ч Е В
	Имя	Г Р И Г О Р И Й
	Отчество	М И Х А Й Л О В И Ч
5.	Дата рождения	2 5 (число) 0 8 (месяц) 2 0 0 3 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Свердловская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Екатеринбург
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	СУНЦ УрФУ

Место для скобы

Шифр 004448

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
21б	14.04.21	Гендрина И.Ю.	[signature]

№1

$$x - ? : \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Решение:

1) Заметим, что если

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}\right)$ $(\in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow$ можем убрать посл. выражение в системе, и оставить только 2 условие для x: $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2) Так как

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} \in \mathbb{Z}$ и $x - \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} + x - \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ $\left(= x - \frac{1}{x^2+2021}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (*) \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ x - \frac{1}{x^2+2021} \in \mathbb{Z} \quad (2) \\ x - \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Заметим, что: $\frac{1}{x^2+2021} \notin \mathbb{Z}$ $\forall x$

(т.к. $x^2+2021 \geq 2021 \Rightarrow \frac{1}{x^2+2021} \in \left(0; \frac{1}{2021}\right]$ $\forall x$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\frac{1}{x^2+2021}\right\} = \frac{1}{x^2+2021}$ ($\{a\}$ - дробная часть числа a)

Т.к. $\frac{1}{x^2+2021} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ из условий (1) и (2): $\frac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$, $x \notin \mathbb{Z}$,

Более того: $\{x\} = \left\{\frac{1}{x}\right\} = \left\{\frac{1}{x^2+2021}\right\} = \frac{1}{x^2+2021}$ ← необходимое условие, без которого система (*) неверна.

3) 1 случай: $|x| > 1$: ($x \neq \pm 1$, т.к. $x \notin \mathbb{Z}$)

$|x| > 1 \Rightarrow \left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2+2021} \Leftrightarrow x^2 - x + 2021 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 2021 < 0 \Rightarrow$ такого x не существует.

(Продолжение на следующей странице)

1	2	3	4	5
7	7	7	0	0

Место для скобы

Шифр 004448

№1 (продолжение)

2 случай: $|x|<1 \Rightarrow \{x\}=x \Rightarrow x=\frac{1}{x^2+2021}$

$x^3+2021x=1$

Рассм. $f(x)=x^3+2021x$

$f(x)\uparrow\uparrow$ на $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ каждому x ставится в соответствие единственное значение ф-ии; каждому значению ф-ии ставится в соответствие единственное значение аргумента.

Т.к $D_f=\mathbb{R}$, $E_f=\mathbb{R}$ $\Rightarrow f(x)=c$ – гарантированно имеет единств. реш. $\forall c \Rightarrow \exists!\, x: x^3+2021x=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x\}=\left\{\frac{1}{x^2+2021}\right\}$ $\left(x=\frac{1}{x^2+2021}\right)$ (3)

НО! необходимо еще выполнение: $\left\{\frac{1}{x}\right\}=\{x\}=x$

Рассм $\left\{\frac{1}{x}\right\}$: $\left\{\frac{1}{x}\right\}=\left\{\frac{1}{\frac{1}{x^2+2021}}\right\}=\{x^2+2021\}=\{x^2\}\neq\{x\}\Rightarrow$ (из (3))

$\Rightarrow$ таких x нет.

Ответ: нет

Место для скрбы

Шифр 004448

№2

$\sin 2x + \sin^5 2x + 2020\sin^3 2x = \cos 4x + \cos^5 4x + 2020\cos^3 4x$

Рассм. $f(t) = t + t^5 + 2020t^3$ $\quad D_f = \mathbb{R}, \quad E_f = \mathbb{R}$

Ввиду того, что все степени t - нечетные $\Rightarrow$

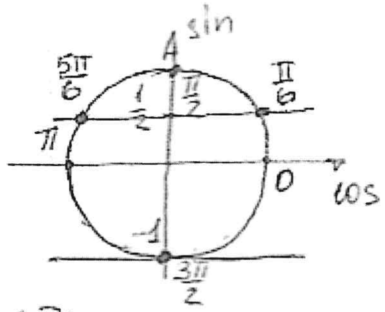
$\Rightarrow f(t) \uparrow\uparrow$ на $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ каждому значению аргумента ставится в соотв. единственное значение ф-ии и наоборот. $\Rightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\sin 2x) = f(\cos 4x) \Leftrightarrow \sin 2x = \cos 4x$

$\sin 2x = 1 - 2\sin^2 2x$

$2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$



$D = 1 + 8 = 9$

$$\left[\begin{aligned} &\sin 2x = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{aligned} &2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k_1 \\ &2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k_2 \end{aligned}\right. \\ &\sin 2x = \frac{-1-3}{4} = -1 \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k_3 \end{aligned}\right. \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{12} + \pi k_1 \\ &x = \frac{5\pi}{12} + \pi k_2 \\ &x = \frac{3\pi}{4} + \pi k_3 \end{aligned}\right. \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{12} + \pi k_1$, $x_2 = \frac{5\pi}{12} + \pi k_2$, $x_3 = \frac{3\pi}{4} + \pi k_3$ $\quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

7б

Место для скобы

Шифр

№3 $P(t)=t^n+5t^{n-1}+3$ $n>1, n\in \mathbb{Z}$

P(t) в виде произв. многочленов с целыми коэффициентами -?

Решение:

1) Необх. получить произведение многочленов положительной степени => многочлен P(t) должен нацело делиться на некий многочлен q(t).

Если $\exists q(t) \Rightarrow \exists h(t)$ многочлен 1й степени, который делит P(t) (т.е. многочлен P(t) имеет корни). Более того, по схеме Горнера, ~~корни P(t) должны быть~~ хотя бы один корень многочлена P(t) должен быть целым, иначе: q(t) - не с целыми коэффициентами $\otimes$ усл.

2) По т. Безу: целыми корнями многочлена P(t) могут быть делители свободного коэф-та (т.е. 3) => возм. корни: {1, -1, 3, -3}

3) Построим схему Горнера.

	1	5	0	0	0	...	0	0	3
1	1	6	6	6	6	...	6	6	$9\neq 0$
-1	1	4	-4	4	-4	...	4	-4	$7\neq 0$
3	1	8	24	24	24	...	24	24	$24\cdot 3+3\neq 0$
-3	1	2	-6	18	$-3\cdot 18$	...	$2\cdot 3^{n-2}$	$2\cdot 3^{n-1}$	$2\cdot 3^n+3\neq 0$

Таблица остатков

1 б

=> целых корней у многочлена P(t) нет =>

=> возможно разбиение на произв. многочленов только с нецелыми коэффициентами.

Ответ: НЕТ