ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА
ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004406

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	М О Р О З О В
	Имя	В Я Ч Е С Л А В
	Отчество	Д М И Т Р И Е В И Ч
5.	Дата рождения	2 6 (число) 1 0 (месяц) 2 0 0 3 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Ростовская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Ростов-на-Дону
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ школа 100

шифр

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО) 004406

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
~~22~~ 21б	14.01.21	[illegible] И.Ю. Кофракина Е.Е.	

1	2	3	4	5	Σ
4	7	~~2~~ 1	4	5	~~22~~ 21

~~№1~~ №2

$\sin 2x + \sin^5(2x) + 2020\sin^9(2x) = \cos(4x) + \cos^5(4x) + 2020\cos^9(4x)$

1. Сделаем замену: $\sin(2x) = a$ и $\cos(4x) = b$

2. Представим части нашего уравнения в виде функций, тогда

$f(a) = a + a^5 + 2020a^9$ и

$f(b) = b + b^5 + 2020b^9$

3. Высчитаем производную функц. $f(a)$:

$f'(a) = 1 + 5a^4 + 18180a^8$

4. Исходя из того, что производная представляет из себя сумму положительных членов, т.к $5a^4$ и $18180a^8$ – всегда больше либо равны нулю => производная $f'(a)$ – всегда положительна => функция $f(a)$ – монотонно возрастает

5. Из пункта 4 => $f(a) = f(b)$, что будет выполнятся только в случае, если $a = b$, т. е $\sin(2x) = \cos(4x)$

6. Решим полученое уравнение.

$\sin(2x) = \cos(4x)$

Место для скобы

Шифр 004406

$\sin 2x = 1 - 2\sin^2(2x)$

$2\sin^2(2x) + \sin(2x) - 1 = 0$

Пусть $\sin(2x) = t$, тогда

$2t^2 + t - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

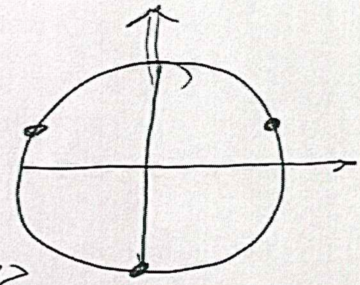
$t_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$

$t_1 = -1 \qquad t_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = -1 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \cancel{2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$

$\cancel{x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3}}$ ~~где~~ $k \in Z$



$\Downarrow$

~~Ответ:~~ $\cancel{x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3}}$ ~~при~~ $\cancel{k \in Z}$

$\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi L \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \pi k \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi n \\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi L \end{array}\right.$ где $k, n, L \in Z$

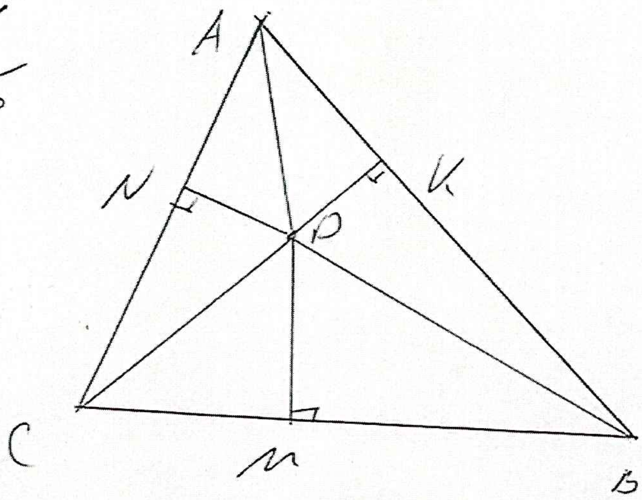
Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + \pi k$; $\frac{5\pi}{12} + \pi n$; $\frac{3\pi}{4} + \pi l$ при $k, n, L \in Z$

Чистовик_2,3,4 и тд.... страница_ОРМО_белый лист.docx

Место для скобы

Шифр 004406

№5



1. Пусть: $AB=x$ $BC=y$ $CD=z$ $PK=x_1$ $PM=y_1$ $PN=z_1$

минимальное $\left(\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}+\frac{z}{z_1}\right)$

2. $S_{ABC}=S_{APC}+S_{APB}+S_{BPC}=\frac{1}{2}x\cdot x_1+\frac{1}{2}\cdot y\cdot y_1+\frac{1}{2}\cdot z\cdot z_1=$

$=\frac{1}{2}(x\cdot x_1+y\cdot y_1+z\cdot z_1)\Rightarrow 2S_{ABC}=x\cdot x_1+y\cdot y_1+z\cdot z_1$

3. Умножим равенство на $\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}+\frac{z}{z_1}$, получим:

$2S_{ABC}\cdot\left(\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}+\frac{z}{z_1}\right)=\left(\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}+\frac{z}{z_1}\right)(xx_1+yy_1+zz_1)=$

$=x^2+y^2+z^2+\frac{xyy_1}{x_1}+\frac{xzz_1}{x_1}+\frac{yxx_1}{y_1}+\frac{yzz_1}{y_1}+\frac{zxx_1}{z_1}+$

$+\frac{zyy_1}{z_1}=x^2+y^2+z^2+xy\left(\frac{y_1}{x_1}+\frac{x_1}{y_1}\right)+zx\left(\frac{x_1}{z_1}+\frac{z_1}{x_1}\right)+yz\left(\frac{y_1}{z_1}+\frac{z_1}{y_1}\right)$

4. $\frac{x_1}{y_1}$ и $\frac{y_1}{x_1}$ – взаимообратные числа, по неравенству о средних, т.к. эти числа положительные, то $\frac{x_1}{y_1}+\frac{y_1}{x_1}\geq 2$, аналогичное утверждение верно и для $\frac{x_1}{z_1}+\frac{z_1}{x_1}$ и $\frac{y_1}{z_1}+\frac{z_1}{y_1}\geq 1$

Место для скобы

Шифр

$\Rightarrow$ ~~Выв~~ $x^2+y^2+z^2+xy\left(\frac{x_1}{y_1}+\frac{y_1}{x_1}\right)+xz\left(\frac{x_1}{z_1}+\frac{z_1}{x_1}\right)+$

$+yz\left(\frac{y_1}{z_1}+\frac{z_1}{y_1}\right)\geq x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz.$ ~~Дост~~

5. Минимальное значение в полученном неравенстве будет получатся при ~~равенстве левой и правой его частей~~ достигается при равенстве слагаемых $\Rightarrow x_1=y_1=z_1 \Rightarrow P$- центр вписанной окружности. ?

$\pm$ решение!

№3 $p(t)=t^n+5t^{n-1}+3$, $n>1$, n-целое

По теореме Виета для многочлена n-ой степени:

$$\begin{cases} t_1+t_2+\ldots+t_k=-5 \\ t_1\cdot t_2\cdot t_3\cdot\ldots\cdot t_k=3 \end{cases}$$

t_i - корни $i\in[i;k]$ i- целое

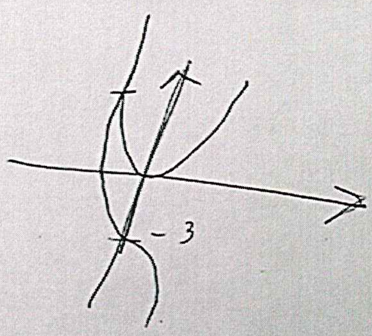
$t^n+5t^{n-1}+3=0$

$t^n=-5t^{n-1}-3$

При четных n:

$y_1=t^n$

$y_2=-5t^{n-1}-3$



Не более двух отрицательных корней

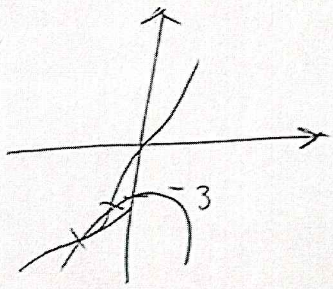
Место для скобы

Шифр

При нечетных n

$y_1 = t^n$

$y_2 = -5t^{n-1} - 3$



Не более двух отрицательных корней

Т.к по т. Виета кол-во отриц корней четно, т.к $t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_n = 3$, =>

=> 2 отриц. корня =>

=> $\begin{cases} t_1 + t_2 = -5 \\ t_1 \cdot t_2 = 3 \end{cases}$ => можно составить уравнение вида

$t^2 + 5t + 3 = 0$ (которое имеет эти же решения)

$D = 25 - 12 = 13$

$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

Т.к $\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16}$ => $3 < \sqrt{13} < 4$ => $\sqrt{13} < 5$ => $t_{1,2} < 0$

Из многочлена $p(t)$ можно выделить множитель $f(t) = (t^2 + 5t + 3)$, а второй множитель $g(t) = t^{n-2} + (-3)t^{n-4} + \ldots + 1)$

~~Ответ: да, можно~~

$$
\begin{array}{r|l}
-t^n + 5^{n-1} + 3 & t^2 + 5t + 3 \\
t^n + 5t^{n-1} + 3t^{n-2} & t^{n-2} - 3t^{n-4} + \ldots + 1 \\
\hline
-3t^{n-2} + 3 & \\
-3t^{n-2} - 15t^{n-3} & \\
\hline
15t^{n-3} + \ldots &
\end{array}
$$

Место для скобы

Шифр

Т.к мы нашли квадратное уравнение корни которого такие же как и у исходного (по т. Виета), причем раз исходное и при четных и при нечетных значения n имеет 2 отрезка решения (показано графически), то вот эти два значения выделить в квадратных трехчлен возможно.

Ответ ширкий

Ответ: да, можно

№4 $$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}x} \le \frac{3}{2}-\frac{m}{x(x^2+\sqrt[3]{2020^4})}-\frac{\sqrt[3]{2020^4}x}{m+x^3}$$

$x>0 \quad m>0$

Пусть $\sqrt[3]{2020^4}\cdot x=t$, $t>0$

$$\frac{x^3}{m+t}+\frac{m}{x^3+t}+\frac{t}{m+x^3}\le\frac{3}{2}$$

Сумма и отношение положит. чисел - положительно =>

$$\frac{1}{\frac{x^3}{m+t}+\frac{m}{x^3+t}+\frac{t}{m+x^3}}\ge\frac{2}{3}\Big|\cdot 3$$

https://docviewer.yandex.ru/view/745022622/?*=GrO7Bn5azHIR6ovS4NFDutpr7457InVybCI6InlhLW1haWw6Ly8xNzU2NDAzODU0Njc0NTAwMT... 1/1

Место для скобы

Шифр

За

$$\frac{3}{\frac{x^3}{m+t}+\frac{m}{x^3+t}+\frac{t}{m+x^3}} \geq 2 \quad (1)$$

По неравенству о средних:

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3}$$, равенство достигается при $a=b=c$

Поэтому из (1):

$$\frac{\frac{m+t}{x^3}+\frac{x^3+t}{m}+\frac{m+x^3}{t}}{3} \geq \frac{3}{\frac{x^3}{m+t}+\frac{m}{x^3+t}+\frac{t}{m+x^3}} \geq 2$$

$$\underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{m+t}{x^3}+\frac{x^3+t}{m}+\frac{m+x^3}{t}\right)}$$

$$\frac{1}{3}\left(\underbrace{\frac{m}{x^3}+\frac{x^3}{m}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{t}{x^3}+\frac{x^3}{t}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{t}{m}+\frac{m}{t}}_{\geq 2}\right) \geq 2$$

Место для скобы

Шифр

Заметим, что оценка в последнем достигается тех же условиях что и в исходном неравенстве

$$\begin{cases} x^3 = m \\ m = 1 \\ x^5 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^5 = \sqrt[3]{2020^4} \cdot x, \text{ а т.к } x > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \sqrt[3]{2020^4}$$

$$x = \sqrt[3]{2020^2} > 0 \Rightarrow m = 2020^2$$

Ответ: $m = 2020^2$

№1 $\underbrace{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}}_{a}$; $\underbrace{x - \frac{1}{x}}_{b}$; $\underbrace{\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}}_{c}$

Обратим внимание, что все целые
=> сумма целых - целая

Заметим, что a и c - взаимно обратны по знаку

Умножим a и b

Место для скобы

Шифр

$a+b = x - \frac{1}{x^2+2021}$ – должно быть целым,

но тогда $x - \frac{1}{x^2+2021}$ и $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$?

Если $\frac{1}{x^2+2021}$ – дробная и $|x|>1 \Rightarrow$ у $\frac{1}{x}$ не может быть такой же дробной части ?

Но $\frac{1}{x^2+2021}$ – точно дробь $<1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ число $\left(x - \frac{1}{x^2+2021}\right) = k$ $(k \in Z)$ и у x такая же дробная часть, как и у $\frac{1}{x}$, но это только при $x=\pm1$

Подставляя ±1 в исходное и а не целые

Если $x + \frac{1}{x^2+2021}$ – целое $\Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$ – целое если $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2+2021}$

дробь по модулю <0

$x^2 - x + 2021 = 0$

$\Delta < 0$, чего быть не может ?

Ответ: нет, не может

$\mp$