08043

Шифр

ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

ет	МАТЕМАТИКА
нт	1
	11
ия	МОНГУШ
	ДАЖЫМА
во	ШОЛБАНОВИЧ
ождения	15 (Число) 03 (Месяц) 2006 (Год)
	РФ
(пр: Томская обл., нградская область)	Респ. Тыва
ципального образования *, деревня, село, город)*	город
нный пункт *(пр: Томск, ово, Псков)*	Кызыл
наименование зательного учреждения, ом Вы обучаетесь в время	МАОУ „Лицей №15"

сие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail ультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Монгуш

Шифр 08043

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
15	29.03	Коржакина Е.С.	[illegible]

4) $ax^3 - ax^2 + bx + b$

по теореме виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-a}{a} = 1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{b}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

$x_1 = \frac{-b}{ax_2x_3}$; $x_2 = \frac{-b}{ax_1x_3}$; $x_3 = \frac{-b}{ax_1x_2}$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{ax_2x_3}{-b} + \frac{ax_1x_3}{-b} + \frac{ax_1x_2}{-b} = \frac{a}{-b}(x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2) = -\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = -1$$

$$\underbrace{(\underset{1}{x_1+x_2+x_3})(\underset{-1}{\tfrac{1}{x_1}+\tfrac{1}{x_2}+\tfrac{1}{x_3}})}_{=}$$

$1 \cdot (-1) = -1$

ч.т.д.

1	2	3	4	5	Σ
4	3	1	7	0	15

2) ~~$2^{\lg(x^2...}$~~ $2^{\lg(x^2-2023)} - \lg 2^{(x^2-2022)} = 0$

ОДЗ: $x^2 - 2023 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{2023}) \cup (\sqrt{2023}; +\infty)$

$2^{\lg(x^2-2023)} - x^2(2022)\lg 2 = 0$

Замена: $\lg x^2 - 2023 = t > 0$

$2^{\lg(t)} - (t+1)\lg 2 = 0$

$2^{\lg(t)} = \lg 2(t+1)$

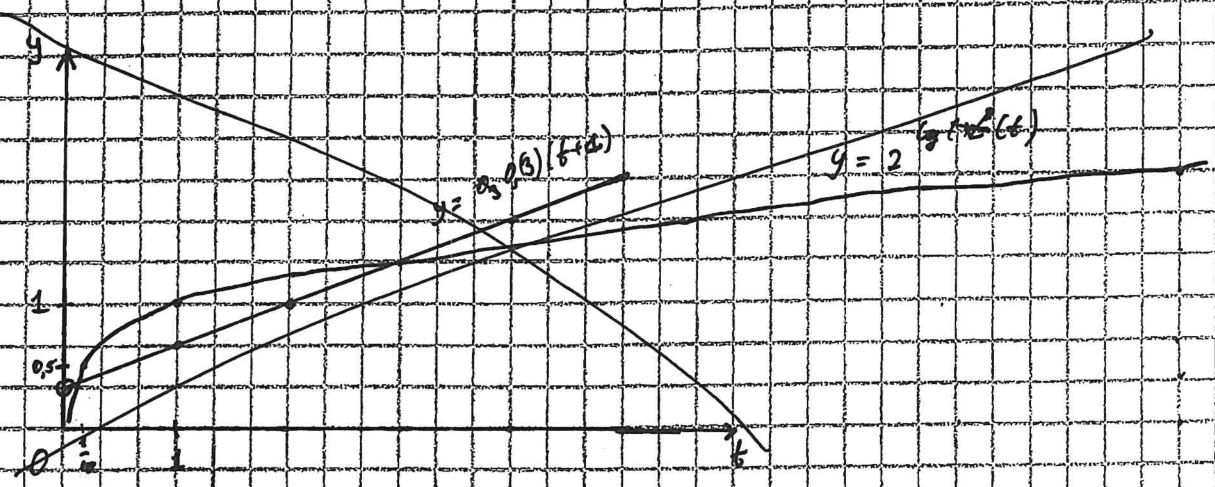
Оценка: $\lg 2 = \lg \frac{1}{\log_2 10} > \frac{1}{3,5} \Rightarrow \frac{1}{\log_2 10} \approx 0,3$ (для вычисления ~~кол-ва~~ примерного кол-ва)

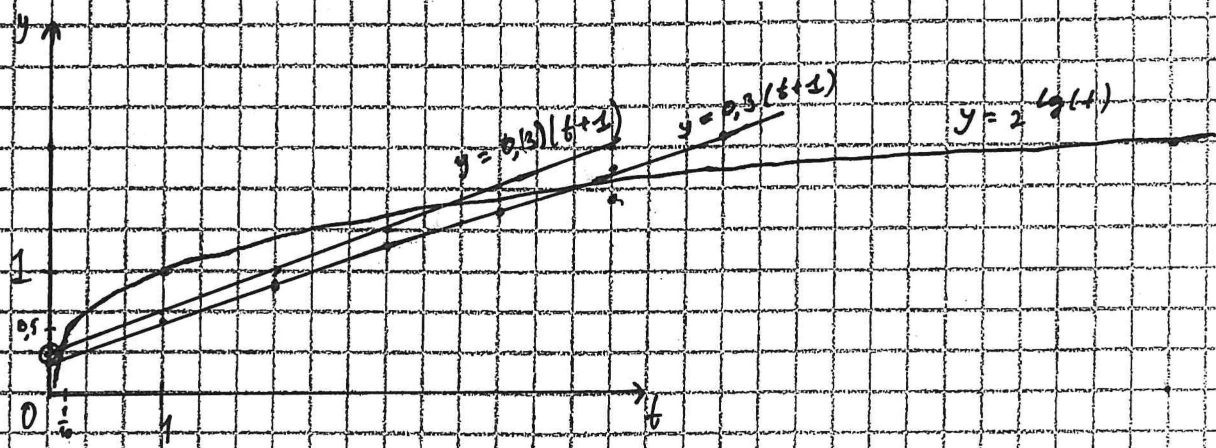
$\lg 2 = \frac{1}{\log_2 10} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{\log_2 10} < 0,(3)$

$\log_2 10 < 3,5$, т.к. $2^{3,5} = 8 \cdot \sqrt{2} = 8 \cdot 1,4 = 11,2 > 10$

$\sqrt{2} > 1,4$

продолжение на след. странице.





так как $t+1$ $\underbrace{0,3(t+1) < \lg 2(t+1) < 0,(3)(t+1)}$

прямая $\lg 2(t+1)$ находится между двумя прямыми.

Так как обе прямые имеют 2 точки пересечения, то и прямая $\lg 2(t+1)$ будет иметь 2 точки пересечения

Возврат: $(x^2-2023)=t$

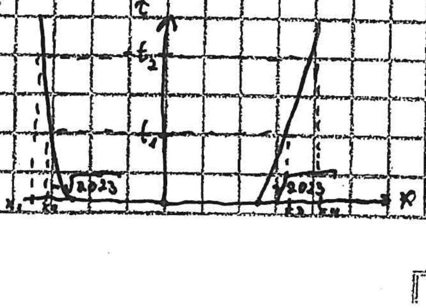
так как график x^2-2023 парабола, то x имеет 2 значения, при которых $x^2-2023=t$

$\underbrace{x^2-2023>0,\quad t_1>0 \text{ и } t_2>0}$

$$\left[\begin{array}{ll} x^2-2023=t_1, & \cancel{-2x}\,(x-\sqrt{2023+t_1})(x+\sqrt{2023+t})=0 \\ x^2-2023=t_2 & \cancel{-2x}\,(x-\sqrt{2023+t})(x+\sqrt{2023+t})=0 \end{array}\right.$$

$\Downarrow$

4 корня



Ответ: 4.

1) $2x^2+2x^2z^2+z^2+7y^2-42y+33=0$

$2x^2+2x^2z^2+z^2+7y^2$ – ~~больше~~ неотрицательно.

$\Downarrow$

$-42y+33\le 0$

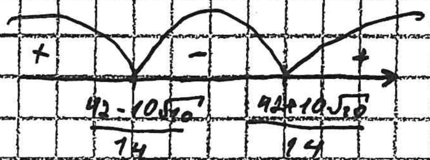
$y \geqslant \frac{33}{42}$

$7y^2-42y+33\le 0$, т.к. $2x^2+2x^2z^2+z^2$ – неотрицательно

$D=1764-924=840$

$y_1=\frac{42-\cancel{10\sqrt{10}}\,2\sqrt{210}}{14}=3-\frac{\sqrt{210}}{7}$

$y_2=\frac{42+\cancel{10\sqrt{10}}\,2\sqrt{210}}{14}=\frac{21+\sqrt{210}}{7}=3+\frac{\sqrt{210}}{7}$



$\begin{cases} y\ge\frac{33}{42}, \\ y\in\left[\frac{42-\cancel{10\sqrt{10}}\,2\sqrt{210}}{14};\ \frac{42+\cancel{10\sqrt{10}}\,2\sqrt{210}}{14}\right], \end{cases} \Rightarrow y\in\left[\frac{33}{42};\ \cancel{\frac{40+10\sqrt{10}}{14}}\ 3+\frac{2\sqrt{210}}{14}\right]$

~~$3<\sqrt{10}<4$~~ $\quad 14<\sqrt{210}<15$

$\frac{33}{42}\ \Delta\ \cancel{\frac{42-10\sqrt{10}}{14}}\ 3-\frac{\sqrt{210}}{7}$

$\frac{70}{14}<\frac{40+10\sqrt{10}}{14}<\frac{80}{14}$ $\quad 5<3+\frac{2\sqrt{210}}{14}\le 3+2\frac{2}{14}$

$\cancel{33}\ 11\ \Delta\ 42-\cancel{10\sqrt{10}}\,2\sqrt{210}$

~~$40<40+10\sqrt{10}<80$~~

~~$30<10\sqrt{10}<40$~~

$15{,}5>15 \quad < \sqrt{210}$

~~$15{,}5^2>225$~~

$\cancel{10\sqrt{10}}\ \Delta\ \cancel{31}\ 15\ 5$

$210 <$

$\cancel{1000}\ \cancel{>}\ \cancel{361}\ 225$

$\Downarrow$

$\frac{33}{42}>\cancel{\frac{42-10\sqrt{10}}{14}}\ 3-\frac{2\sqrt{210}}{7}$

$5<\frac{\cancel{40+10\sqrt{10}}\ 2\ 2\sqrt{210}}{14}<5\frac{10}{14}$

$\Downarrow$

$y\in[1;5]$, $y\in\mathbb{Z}$.

Подставим каждое целое значение из промежутка $[1;5]$ в y.

Место для скобы

Шифр 08043

$y = 1 \Rightarrow 2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 - 2 = 0$

$x = \pm\sqrt{\frac{2 - z^2}{2 + 2z^2}}$

$\frac{2 - z^2}{2 + 2z^2} \geq 0$, $2 + 2z^2 > 0 \Rightarrow 2 - z^2 > 0$

$z \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

$z \in [-1; 1]$

$z = -1$

~~$x = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$ – не целое~~

$x = \pm\frac{1}{2}$ – не целое

$z = 1$

$x = \pm\frac{1}{2}$ – не целое

$z = 0$

$x = \pm 1$.

Получили: $(-1; 1; 0)$ и $(1; 1; 0)$

$y = 2 \Rightarrow 2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 - 23 = 0$

$x = \pm\sqrt{\frac{23 - z^2}{2 + 2z^2}}$

$23 - z^2 > 0$

$z \in [-4; 4]$ т.к. z^2 симметрично относительно 0, ~~$-4 = 4$~~ $f(-4) = f(4)$ и т.д.

$z = 0$ $x = \pm\sqrt{\frac{23}{2}}$ – не цел.

$z = 1$ $x = \pm\sqrt{\frac{22}{4}}$ – не целое

$z = 2$ $x = \pm\sqrt{\frac{19}{6}}$ – не целое

$z = 3$ $x = \pm\sqrt{\frac{14}{20}}$ – не целое

$z = 4$ ~~x – не целое~~ ~~т.к.~~ ~~x больше $x(4) \geq 1$~~ $x = \pm\sqrt{\frac{7}{34}}$ – не целое

корней с $y = 2$ нет.

...скобы

Шифр 8043

$y = 3 \Rightarrow 2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 - 30 = 0$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{30 - z^2}{2 + 2z^2}}$ $\qquad 30 - z^2 > 0 \Rightarrow z \in [-5; 5]$

или $2 + 2z^2 > 30 - z^2$, mod $x < 1$ $\Rightarrow$ $\cancel{30}\ 2 + 2z^2 < 30 - z^2$

$3z^2 < 32$

$z^2 < \dfrac{32}{3}$

$z \in [-3; 3]$

$\Rightarrow z \in [-3; 3]$

$z = 0 \quad x = \pm\sqrt{15}$ - не целое

$z = 1 \quad x = \pm\sqrt{\dfrac{29}{4}}$ - не целое

$z = 2 \quad x = \pm\sqrt{\dfrac{26}{10}}$ - не целое.

$z = 3 \quad x = \pm\sqrt{\dfrac{21}{20}}$ - не целое.

при $y = 3$ корней нет.

~~$y = 4 \Rightarrow 2x^2 + 2x^2z^2 + z^2$~~

найдем вершину параболы $7y^2 - 42y + 33$

$y_0 = \dfrac{42}{14} = 3. \Rightarrow$ относительно $y = 3$

парабола симметрична

$f(y) = f(\cancel{-5}\,1) = f(5)$ и $f(2) = f(4)$

при $y = 5$ $\cancel{x} = z = 0$ $\quad x = \pm 1$ Получаем: $(\cancel{5}; -1; 5; 0)$ и $(1; 5; 0)$

Ответ: $\{(x; y; z) - (-1; 1; 0), (1; 1; 0); (1; 5; 0); (-1; 5; 0)\}$

3) $\frac{2a}{3(b+c)} + \frac{2b}{3(a+c)} + \frac{3c}{3(a+b)} \geq 1$

$\frac{2}{3}\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) \geq 1$

$\frac{2}{3}\left(\frac{a^3+a^2b+a^2c+abc+b^3+ab^2+b^2c+abc+c^3+bc^2+ac^2+abc}{a^2b+ab^2+abc+b^2c+a^2c+abc+ac^2+bc^2}\right) \geq 1$

$2a^3+2a^2b+2a^2c+\cancel{6abc}+2b^3+2ab^2+2b^2c+2c^3+2bc^2+2ac^2 \,\triangle$

$\triangle\, 3a^2b+3ab^2+\cancel{6abc}+3b^2c+3a^2c+3ac^2+3bc^2$

$2a^3+2b^3+2c^3 \,\triangle\, a^2b+ab^2+b^2c+a^2c+ac^2+bc^2$

$a^2(2a-b-c)+b^2(2b-a-c)+c^2(2c-a-b) \,\triangle\, 0$

если $b+c>2a$

возможны 3 случая $b=c=a$ тогда $\frac{2a}{3(b+c)}+\frac{2b}{3(a+c)}+\frac{2c}{3(a+b)}=1$

$\left.\begin{array}{l} a<b>c \\ a<c>b \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2a}{3(b+c)}+\frac{2b}{3(a+c)}+\frac{2c}{3(a+b)}>1$

если $b+c<2a$

~~рассматриваем такие же случаи как~~ от

рассматриваем другую скобку и приходим к тем же результатам ч.т.д.