ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА
ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004411
Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	М Е Л Ь Н И К О В
	Имя	И Л Ь Я
	Отчество	С Е Р Г Е Е В И Ч
5.	Дата рождения	2 3 (число) 1 2 (месяц) 2 0 0 2 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Курганская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Село
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	село Лесниково
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	Гбоу Курганский областной лицей-интернат для одаренных детей

Шифр 004411

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
16	14.04.21	Кадочкина Е.Е.	[illegible]

№1

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$; $x - \frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$

① ② ③

1	2	3	4	5	Σ
4	5	2	5	0	16

Число ① равно противоположному числу ③

Вычтем из ② ③:

$$x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} + \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x^2+2021} = \frac{x(x^2+2021)-1}{x^2+2021} = k,$$ где $k \in \mathbb{Z}$,

т.к. ② и ③ должны быть целыми.

Пусть $x^2+2021 = t$:

$\frac{xt-1}{t} = k$ $\quad t(x-k) = 1$ — с данным $k \in \mathbb{Z}$, решений нет. $\Rightarrow$

~~$(x^2+2021)(x-k)=1$ – решений в~~

k – не целое $\Rightarrow$ ② или ③ – не целые

Можно доказать иначе:

② $\in \mathbb{Z}$ только при $x = 1$, тогда другие 2 числа тоже должны быть целыми

при $x = 1$: $\frac{1}{1+2021} - \frac{1}{1} = \frac{1}{2022} - 1 = -\frac{2021}{2022} \notin \mathbb{Z}$

Ответ: нет, не существует

4

Место для скобы

Шифр 004411

№3

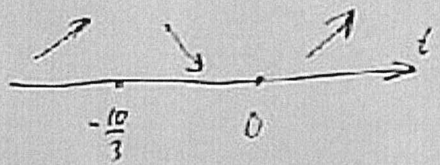
$p(t)=t^n+5t^{n-1}+3$ $\qquad n>1,\ n\in\mathbb{Z}$

Рассмотрим $n=3$:

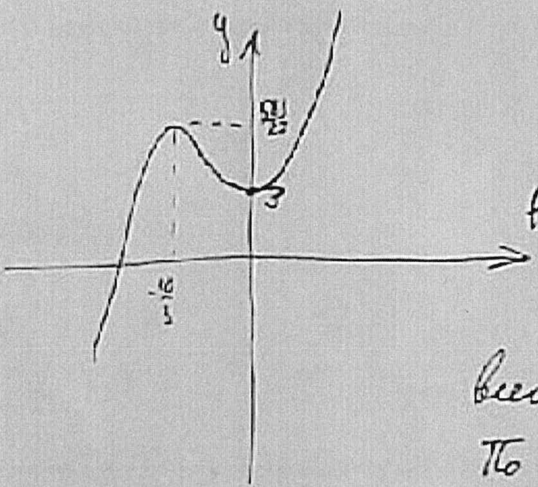
$p(t)=t^3+5t^2+3$ $\Rightarrow -t^2(t+5)=3$ — ур-е не имеет целых корней.

$p'(t)=3t^2+10t=t(3t+10)$

$\left[\begin{array}{l} t=0\\ t=-\frac{10}{3}\end{array}\right.$



Изобразим уравнение t^3+5t^2+3 в системе координат ty:



При $t=0$: $0^3+5\cdot0^2+3=3=y$

При $t=-\frac{10}{3}$: $\left(-\frac{10}{3}\right)^3+5\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)^2+3=$

$=\frac{500}{27}+3=\frac{581}{27}$

Из графика видно, что корень всего один.

По теореме Безу $t^n+5t^{n-1}+3$, при $n=3$ невозможно представить в виде произведения многочленов с целыми коэффициентами, т.к. корни ни не целые.

Ответ: Нет, нельзя.

Место для скобы

Шифр 004411

№4

$m>0$

$$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}x} \leq \frac{3}{2} - \frac{m}{x^3+\sqrt[3]{2020^4}x} - \frac{\sqrt[3]{2020^4}x}{m+x^3}$$

Пусть $k = x^3$ $t = \sqrt[3]{2020^4}x$

$$\frac{k}{m+t} \leq \frac{3}{2} - \frac{m}{k+t} - \frac{t}{m+k}$$

$$\frac{k}{m+t} + \frac{m}{k+t} + \frac{t}{m+k} \leq \frac{3}{2}$$

Используя неравенство Несбитта:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

скажем, что:

$$\frac{k}{m+t} + \frac{m}{k+t} + \frac{t}{m+k} = \frac{3}{2}$$

Равенство получается при $k=m=t$?

$k=t \Rightarrow x^3 = \sqrt[3]{2020^4}x$ $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2 = 2020^{\frac{4}{3}} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x = \pm 2020^{\frac{2}{3}} \end{array}\right.$

$k=m \Rightarrow m = x^3$ $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m = (\pm 2020^{\frac{2}{3}})^3 \end{array}\right.$ С учетом того, что $m>0$:

$m = (2020^{\frac{2}{3}})^3 = 2020^2 = 4080400$

Ответ: $m = 4080400$

∓

Место для скобы

Шифр

№2

$$\sin(2x)+\sin^5(2x)+2020\cdot\sin^3(2x)=\cos(4x)+\cos^5(4x)+2020\cos^3(4x)$$

Пусть $t=2x$

$f(t)=f(\frac{\pi}{2}-2t)$ — функциональное равенство

$f(t)-f(\frac{\pi}{2}-2t)=0$

$\sin t+\sin^5 t+2020\sin^3 t-\sin(\frac{\pi}{2}-2t)-\sin^5(\frac{\pi}{2}-2t)-2020\cdot\sin^3(\frac{\pi}{2}-2t)$

Пусть $a=\sin t$

$b=\sin(\frac{\pi}{2}-2t)$:

$a+a^5+2020a^3-b-b^5-2020b^3=0$

$(a-b)+(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)+2020(a-b)(a^8+a^7b+a^6b^2+\ldots+ab^7+b^8)=0$

$(a-b)(1+a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4+2020(a^8+a^7b+\ldots+ab^7+b^8))=0$?

$$\left[\begin{array}{l}a=b\\1+a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4+2020(a^8+a^7b+a^6b^2+a^5b^3+\ldots+a^2b^6+ab^7+b^8)=0\end{array}\right.$$

$\sin t=\sin(\frac{\pi}{2}-2t)=\sin\frac{\pi}{2}\cos 2t-\cos\frac{\pi}{2}\sin 2t=\cos 2t$

$1-\sin^2 2t-\sin t=0$ $D=1+8=9$ $\sin t_{1,2}=\frac{1\pm3}{-4}=-1;\ \frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{l}\sin t=-1\\\sin t=\frac{1}{2}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}t=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\t=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\t=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k\\2x=\frac{\pi}{6}+2\pi k\\2x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+\pi k\\x=\frac{\pi}{12}+\pi k\\x=\frac{5\pi}{12}+\pi k\end{array}\right.$$

Ответ:
$$\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\x=\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\x=\frac{5\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$