Место для скобы

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

003992

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	2
3.	Класс	11
4.	Фамилия	МАЗЮК
	Имя	СОФЬЯ
	Отчество	ДЕНИСОВНА
5.	Дата рождения	Число: 16; Месяц: 09; Год: 2003
6.	Страна	Россия
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	Томская область
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Томск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ СОШ №49

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ______

Место для скобы

Шифр 003992

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
29б	5.04.21	Гендрино И.Ю.	[подпись]

$\boxed{№2}$ $\sin x + \sin^3 x + 2021\sin^5 x = \cos(2x) + \cos^3(2x) + 2021\cdot\cos^5(2x)$

Пусть $f(t) = t + t^3 + 2021t^5 \Rightarrow$ исходное ур-ие равносильно уравнению:

$f(\sin x) = f(\cos(2x))$

7б

Заметим, что $f(t)$ - монот. возрастающая на всей области определения функция:

$f'(t) = 1 + 2t^2 + 2021\cdot 5\cdot t^4 > 0$ при $\forall t$

Т.к. $f(t) \nearrow$ на обл. опред. $\Rightarrow$ ур-ие ~~имеет~~ $f(\sin x) = f(\cos(2x))$ имеет решение только при $\sin x = \cos(2x) \Rightarrow$:

1	2	3	4	5
7	7	7	1	7

$\sin x = 1 - 2\sin^2 x$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

Пусть $\sin x = t$, $|t| \le 1$:

$2t^2 + t - 1 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = -1 \\ t_2 = +\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^n\cdot\frac{\pi}{6} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6} + \pi k$; $(n,k) \in \mathbb{Z}$ ✓

$\boxed{№1}$ Допустим, что такое число x существует. Тогда пусть $a = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2020}$; $b = x - \frac{1}{x}$; $c = \frac{1}{x^2+2020} - \frac{1}{x}$.

~~Т.к. $a+b+c$ … $x \notin \mathbb{Z}$ …~~

При $x \in \mathbb{Z}$: $b = x - \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1$, тогда $a = 1 - \frac{1}{2021} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$

7б

При $x \notin \mathbb{Z}$: Если x - иррац. число $\Rightarrow b = \frac{x^2-1}{x} \notin \mathbb{Z}$, т.к. x^2-1 - не ирр. число, а x - иррац.

Если x - дробное число: пусть $x = \frac{k}{y} \Rightarrow$: $k \ne 0$; $y \ne 0$; $(k,y) \in \mathbb{Z}$:

$\Rightarrow b = \frac{k}{y} - \frac{y}{k} \Rightarrow \frac{k^2-y^2}{ky} = b \Leftrightarrow ky\cdot b = k^2 - y^2$; решим относительно k:

$k^2 - by\cdot k - y^2 = 0$

$D = b^2y^2 + 4y^2 = y^2(b^2+4) > 0$ $(y \ne 0) \Rightarrow k_{1,2} = \frac{by \pm y\sqrt{b^2+4}}{2}$

Т.к. $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{b^2+4} = t$, где $t \in \mathbb{Z}$

~~$b^2+4 = t^2$, но таких целых чисел~~

Место для скобы

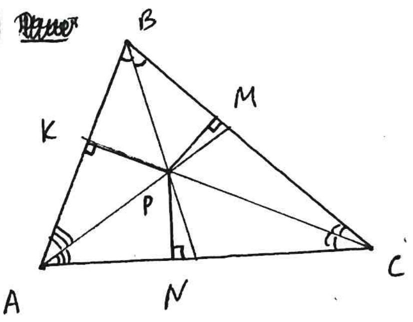
Шифр 003992

$\Rightarrow t^2 = b^2 + 4$

$t^2 - b^2 = 4$, но таких целых чисел ~~...~~ $\nexists \Rightarrow ↯$

Ответ: нет, не существует

$\boxed{№5}$ ~~Дано~~



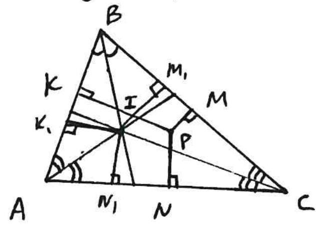
Найти: т. P для которых $\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK}$ — минимальна.

Решение

1) Наим. значение выражения $f = \frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK}$ достигается при наибольших значениях PM, PN и PK

2) Заметим, что, если точка P ~~...~~ является инцентром $\triangle ABC$ (точкой пересечения бис-с, то $KP = PM = PN$.

3) Допустим, что т. P не явл-ся инцентром $\triangle ABC \Rightarrow$:



Один из отрезков увеличится, а два других уменьшатся, при этом суммарная длина этих отрезков будет меньше, чем сумма их длин, если бы ~~...~~ т. P являлась инцентром $\triangle ABC$.

7б

4) $\Rightarrow f_{min}$ достиг-ся, когда т. P - точка пересечения бис-с $\triangle ABC$. ✓

Ответ: т. P - точка пересечения бис-с $\triangle ABC$.

$\boxed{№4}$ Пусть $x^3 = t$, $\sqrt[3]{2021^4} \cdot x = f \Rightarrow$:

$$\frac{t}{k+f} + \frac{f}{k+t} \leq \frac{3}{2} - \frac{k}{t+f}$$

$$\frac{tk + t^2 + fk + f^2}{k^2 + fk + kt + ft} + \frac{k}{t+f} \leq \frac{3}{2} \quad | \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-t^2k + 2t^3 - f^2t - t^2f - f^2k + 2f^3 + 2k^3 - k^2f - k^2t}{k^2t + 2fkt + kt^2 + ft^2 + k^2f + f^2k + f^2t} \leq$$

Т.к. $x > 0 \Rightarrow t > 0, f > 0, k > 0 \Rightarrow$ знам. $> 0 \Rightarrow$ нер-во равносильно следующему:

$$2t^3 + 2f^3 + 2k^3 - t^2k - f^2t - t^2f - f^2k - k^2f - k^2t \leq 0$$

1б