ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

07980

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| мет | МАТЕМАТИКА | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| нт | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| лия | М | А | С | Л | Ю | К | О | В | | | | | | | | | | | | | |
| | Г | Е | О | Р | Г | И | Й | | | | | | | | | | | | | | |
| тво | О | Л | Е | Г | О | В | И | Ч | | | | | | | | | | | | | |
| рождения | 2 | 2 | | 0 | 6 | | 2 | 0 | 0 | 6 | | | | | | | | | | | |
| | Число | | | Месяц | | | Год | | | | | | | | | | | | | | |
| а | РОССИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ı *(пр: Томская обл., ...инградская область)* | КРАСНОЯРСКИЙ КРАЙ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ...ниципального образования *...и, деревня, село, город)* | ГОРОД | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ...енный пункт *(пр: Томск, ...ово, Псков)* | КРАСНОЯРСК | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ...е наименование ...вательного учреждения, ...ором Вы обучаетесь в ...е время | ФМШ СФУ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

...сие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail ...зультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

*Личная подпись* ____________

Шифр 07980

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. членов жюри | Подписи членов жюри |
|---|---|---|---|
| 20 | 29.03 | Корешкова Е.Е. | [illegible] |

Задача 3

$$\frac{a+b-c}{2c}+\frac{b+c-a}{2a}+\frac{a+c-b}{2b}\geq\frac{3}{2}\qquad a,b,c\in\mathbb{R},\ a,b,c>0.$$

Воспользуемся неравенством о средних:

$$\begin{cases}\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\\ \frac{b+c}{2}\geq\sqrt{bc}\\ \frac{a+c}{2}\geq\sqrt{ac}\end{cases}$$ перемножим между собой и получим:

$$\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{8}\geq\sqrt{a^2b^2c^2}$$

т.к $a,b,c>0 \Rightarrow \frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{8}\geq abc$

$(a+b)(b+c)(a+c)\geq 8abc$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 7 | 2 | 7 | 20 |

$(ab+ac+b^2+bc)(a+c)\geq 8abc$

$a^2b+abc+a^2c+ac^2+b^2a+b^2c+abc+bc^2\geq 8abc$

$a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)+2abc\geq 8abc \quad |-2abc$

$a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)\geq 6abc \quad |-3abc$

$a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)-3abc\geq 3abc \quad |:abc$ т.к $a,b,c>0$

$$\frac{a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)-3abc}{abc}\geq 3$$

$$\frac{a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-3abc}{abc}\geq 3$$

$$\frac{a^2b+ab^2-abc+b^2c+bc^2-abc+a^2c+ac^2-abc}{abc}\geq 3$$

$$\frac{ab(a+b-c)+bc(b+c-a)+ac(a+c-b)}{abc}\geq 3$$

Место для скобы

Шифр 07980

$\frac{a+b-c}{c} + \frac{b+c-a}{a} + \frac{a+c-b}{b} \geq 3 \quad |:2$

$\frac{a+b-c}{2c} + \frac{b+c-a}{2a} + \frac{a+c-b}{2b} \geq \frac{3}{2}$ 2.7б.

Задача 1:

$y^2(y-x+2) - y(x+4) + 5x + 7 = 0$. $\quad y, x \in \mathbb{Z}$

$y(y(y-x+2) - x - 4) + 5x + 7 = 0$

$y(y^2 - xy + 2y - x - 4) + 5x + 7 = 0$

$y(y^2 + 2y + 1 - xy - x - 5) + 5x + 7 = 0$

$y((y+1)^2 - x(y+1)) - 5y + 5x + 7 = 0$

$y(y+1)(y-x+1) - 5(y-x) + 7 = 0$

Пусть $y - x = a$

$y(y+1)(a+1) - 5a + 7 = 0$

$y^2(a+1) + y(a+1) - 5a + 7 = 0$

$D = b^2 - 4a'c \quad b = a+1 \quad a' = a+1 \quad c = -5a+7$.

$D = (a+1)^2 - 4(a+1)(-5a+7) = a^2 + 2a + 1 + 4(a+1)(5a-7) =$

$= a^2 + 2a + 1 + 4(5a^2 - 2a - 7) = a^2 + 2a + 1 + 20a^2 - 8a - 28 =$

$= 21a^2 - 6a - 27 \geq 0 \quad (1)$

1) $21a^2 - 6a - 27 \geq 0 \quad |:3$

$7a^2 - 2a - 9 \geq 0$

$7a^2 - 2a - 9 = 0$

$D = 4 + 36 \cdot 7 = 4 + 252 = 256 = 16^2$

$a_1 = \frac{2+16}{14} = \frac{18}{14} \qquad a_2 = \frac{2-16}{14} = -1$

скобы

Шифр 07980

$(a-\frac{13}{14})(a+1)\geq 0$

$a\in(-\infty;-1]\cup[\frac{13}{14};\infty)$.

т.к $a=y-x$, а $y,x\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow a\in(-\infty;-1]\cup[2,\infty)$

~~$y\geq$~~.

уравнение имеет вид:

$y(y+1)(y-x+1)-5(y-x)+7=0$

$y(y+1)(y-x+1)-5(y-x+1)+12=0$

$(y(y+1)-5)(y-x+1)+12=0$

$(y^2+y-5)(y-x+1)+12=0$

$y^3+y^2-5y+y^2+y-5-x(y^2+y-5)+12=0$

$x(y^2+y-5)=y^3+2y^2-4y+7$

$x=\frac{y^3+2y^2-4y+7}{y^2+y-5}\ \Big|\Rightarrow x=\frac{y^3-6y+17}{y^2+y-5}+2$.

При $y=1$: $x=\frac{1-6+17}{1+1-5}+2=\frac{12}{-3}+2=-4+2=-2$.

При $y=2$; $x=\frac{8-12+17}{4+2-5}+2=8+5+2=15$

При $y=-3$; $x=\frac{-27+18+17}{9-3-5}+2=28+2=30$

~~При $y=$~~

Отв. $(-2,1)$; $(15,2)$

$(30;-3)$

скобы

Шифр 07980

Задача №4 $p \neq 0 \quad p \in \mathbb{R}$

$x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$ Д-ть: $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$

Д-во: уравнение приведённое $\Rightarrow$ по Т Виета:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{2p^2} \end{cases}$ $\odot \Rightarrow (x_1 + x_2) x_1 x_2 = \frac{1}{2p}$

$\Rightarrow x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = \frac{1}{2p}$

Р-м: $x_1 + x_2 = -p$ : возведём в 3 степень:

$(x_1 + x_2)^3 = (-p)^3$

$x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + x_2^3 = -p^3$

$x_1^3 + 3(x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2) + x_2^3 = -p^3 \qquad x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = \frac{1}{2p}$

$x_1^3 + \frac{3}{2p} + x_2^3 = -p^3$

$x_1^3 + x_2^3 = -p^3 - \frac{3}{2p}$.

Р-м: $x_1 + x_2 = -p$. возведём в 4 степень:

$(x_1 + x_2)^4 = (-p)^4$

$x_1^4 + 4x_1^3 x_2 + 6x_1^2 x_2^2 + 4x_1 x_2^3 + x_2^4 = p^4$

$x_1^4 + x_2^4 + 4(x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3) + 6x_1^2 x_2^2 = p^4 \qquad (x_1 x_2)^2 = \left(-\frac{1}{2p^2}\right)^2$

$x_1^4 + x_2^4 + 4(x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3) + \frac{6}{4p^4} = p^4$ (1)

$\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 = -p^3 - \frac{3}{2}p \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$ $\odot \Rightarrow (x_1 + x_2)(x_1^3 + x_2^3) = p^4 + \frac{3}{2}p^2$.

$x_1^4 + x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + x_2^4 = p^4 + \frac{3}{2}p^2$

$\Rightarrow x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = p^4 + \frac{3}{2}p^2 - x_1^4 - x_2^4$. (2)

(2) ур. подст. в (1): $x_1^4 + x_2^4 + 4\left(p^4 + \frac{3}{2}p^2 - x_1^4 - x_2^4\right) + \frac{6}{4p^4} - p^4 = 0$

$x_1^4 + x_2^4 + 4p^4 + 6p^2 - 4x_1^4 - 4x_2^4 + \frac{6}{4p^2} - p^4 = 0$

$-3(x_1^4 + x_2^4) + 3p^4 + 6p^2 + \frac{6}{4p^4} = 0$

$-3(x_1^4+x_2^4) = -3p^4 - 6p^2 - \frac{6}{4p^4}$

$x_1^4 + x_2^4 = p^4 + 2p^2 + \frac{0,5}{p^4}$

$p^4 > 0 \quad p^2 > 0$ т.к $p \neq 0$.

$\Rightarrow x_1^4 + x_2^4 \geq p^4 + 2p^2 + \frac{0,5}{p^4}$

при $p = 1$: $x_1^4 + x_2^4 = 1 + 2 + 0,5 = 3,5$

$2+\sqrt{2} \vee 3,5 \quad | -2$

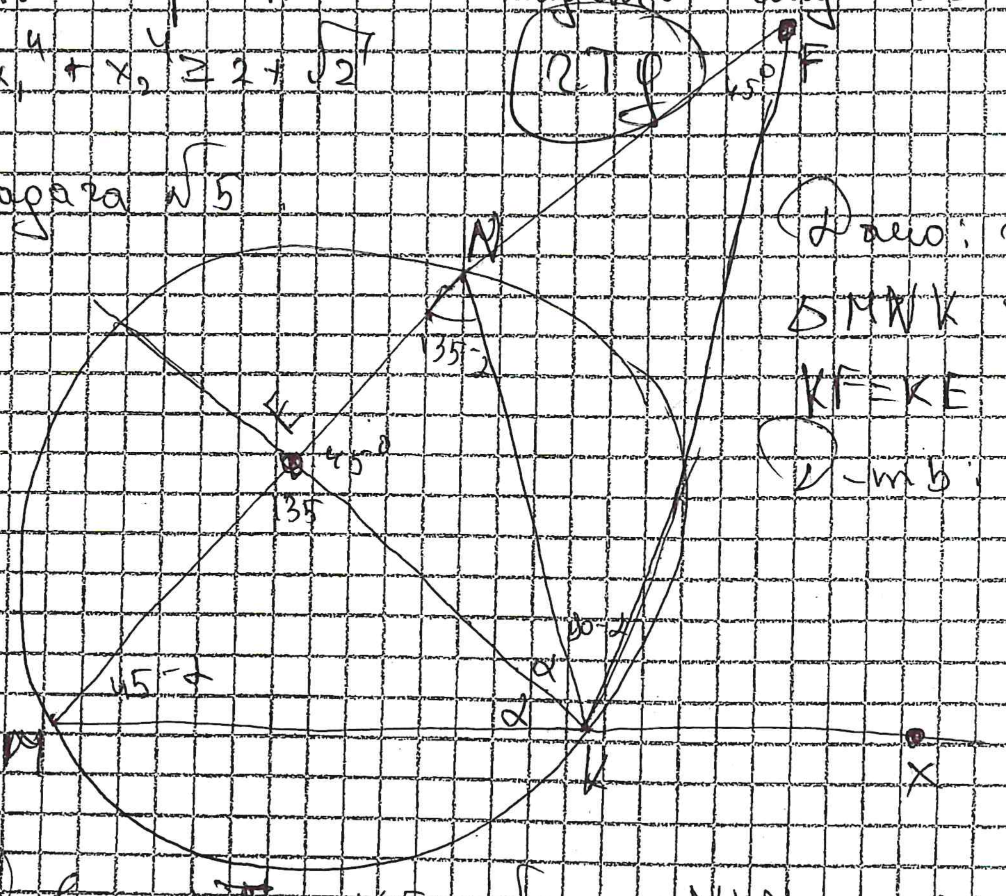
$\sqrt{2} \vee 1,5$ возведем в квадрат

$2 \vee 2,25 \Rightarrow 2+\sqrt{2} < 3,5$

$\Rightarrow x_1^4 + x_2^4 \geq 2+\sqrt{2}$

т.к $p \in \mathbb{R} \Rightarrow$ найдется ненулевое $p$ такое, что $x_1^4 + x_2^4 \geq 2+\sqrt{2}$

Задача №5




Дано: окр $(O; R)$

$\triangle MNK$: $KE$ − бисс $\angle NKM$

$KF \perp KE$ $KF$ − бисс $\angle NKX$

Д-ть: $MK^2 + NK^2 = 4R^2$

Док-во: 1) т.к $KE$ − бисс $\angle NKM \Rightarrow \angle NKE = \angle MKE = \alpha$

$\Rightarrow \angle MKN = 2\alpha \Rightarrow \angle NKX = 180 - 2\alpha$

т.к $KF$ − бисс $\angle NKX \Rightarrow \angle NKF = \angle FKX = \frac{180-2\alpha}{2} = 90-\alpha$

скобы

Шифр 7980

2) Р-м: $\triangle KFE$: $\angle EKF = \angle EKN + \angle NKF = \alpha + 90 - \alpha = 90^0 \Rightarrow \triangle KFE$ - прямоугольный

3) т.к $KF = KE \Rightarrow \triangle KFE$ - равнобедр. прямоугольн $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle EFK = \angle FEK = \frac{90^0}{2} = 45^0$.

4) $\angle ENK = 180 - 45^0 - \alpha = 135^0 - \alpha$.

$\Rightarrow \angle NMK = 180^0 - 135^0 + \alpha - 2\alpha = 45^0 - \alpha$.

Р-м: $\triangle MNK$: по т. sin: $\frac{NK}{\sin(45-\alpha)} = 2R$.

$\frac{MK}{\sin(135^0 - \alpha)} = 2R$ $\quad \frac{MN}{\sin 2\alpha} = 2R$ $\quad \sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$NK = 2R \cdot \sin(45 - \alpha) = 2R \cdot \sin 45 \cos\alpha - \sin\alpha \cos 45^0 = R\sqrt{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)$

$MK = 2R \cdot \sin(135^0 - \alpha) = 2R \cdot \sin 135^0 \cos\alpha - \sin\alpha \cos 135^0 = 2R \cdot \sin(90^0 + 45^0)$
$\cos\alpha - \sin\alpha \cos(90 + 45^0) = 2R \cdot (\cos 45^0) \cos\alpha + \sin\alpha \sin 45^0$
$\Rightarrow MK = R\sqrt{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)$

~~$MN = 2R \cdot \sin(\alpha + \alpha) = 2R \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha$.~~
~~$NM^2 = 16R^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha = 16R^2 (1 - \cos$~~

$NK^2 + MK^2 = 2R^2(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 + 2R^2(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = 2R^2((\cos\alpha - \sin\alpha)^2 + (\cos\alpha + \sin\alpha)^2) = 2R^2(\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha) = 4R^2(\underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{1}) = 4R^2$.

$2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha$

$\Rightarrow NK^2 + MK^2 = 4R^2$

RTD

скобы

Шифр 7980

Задача №2

$\cos 3x = A \cdot \sin 2x$ и $\sin 3x = B \cos 4x$

$A, B \in \mathbb{Q}$

Д-ть: $\sin 3x \in \mathbb{Q}$