07344

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

мет	МАТЕМАТИКА
ант	1
:	9
лия	МАРКОВ
	МАТВЕЙ
ство	АЛЕКСЕЕВИЧ
рождения	10 (Число) 09 (Месяц) 2007 (Год)
а	Россия
н *(пр: Томская обл., ингградская область)*	Кемеровская область
ниципального образования *п, деревня, село, город)*	город
енный пункт *(пр: Томск, ово, Псков)*	Юрга
е наименование овательного учреждения, ором Вы обучаетесь в е время	МБОУ „СОШ №6 г. Юрги".

асие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail зультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись

1 | 2 | 3 | 4 | 5
1 | 3 | 5 | 6 | 7

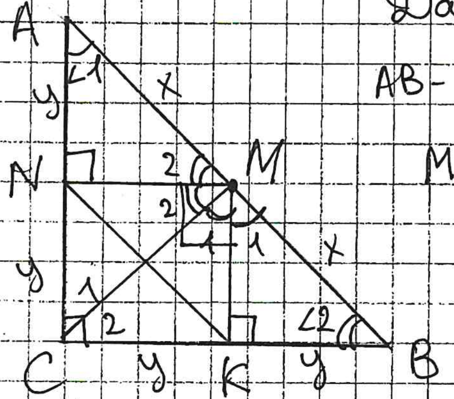
22б

Шифр 07344

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
22б	29.03.23	Тендрина	

Задание 5.



Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный, AB – гипотенуза, т. $M \in AB$

MK – бис. $\angle CMB$, MN – бис. AMC

$CM = KN$.

7б

Доказать: т. M – сер. AB.

Доказательство:

1) Введём обозначения: $\angle AMN = \angle NMC = \angle 2$, $\angle CMK = \angle KMB = \angle 1$

2) $\angle AMC + \angle CMB = 180^\circ$

$\angle AMC = 2 \cdot \angle 2$, $\angle CMB = 2 \cdot \angle 1$ $\Rightarrow 2(\angle 1 + \angle 2) = 180^\circ$

$\Rightarrow \boxed{\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ}$ $\Rightarrow \angle NMK = 90^\circ$ ($NM \perp KM$)

3) Рассмотрим NMKC (четырёхугольник):

① $NK = MC$ (диагонали) – по условию

② $\angle NCK = \angle NMK = 90^\circ$ – доказано выше

$\Rightarrow$ NMKC – квадрат (т.к. квадрат – это ромб, у которого все углы прямые, у квадрата диагонали равны).

4) Если NMKC – квадрат, то $\Rightarrow \angle MNC = \angle MKC = 90^\circ$

($MN \perp AC$, $MK \perp BC$)

5) В прямоуг. $\triangle AMN$ ($\angle ANM = 90^\circ$): $\angle NAM = 90^\circ - \angle 2 = \angle 1$

В прямоуг. $\triangle MKB$ ($\angle MKB = 90^\circ$): $\angle MBK = 90^\circ - \angle 1 = \angle 2$

место для скобы

Шифр 07344

Продолжение к Заданию 5:

6) Рассмотрим Δ ANM и Δ MBK (прямоугольные).

(1) $NM = MK$ (т.к. NMKC - квадрат)

(2) $\angle AMN = \angle MBC = \angle 2$

(3) $\angle ANM = \angle MKB = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ANM = \Delta MBK$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

$\Rightarrow AM = MB$ $\Rightarrow$ т. M - середина AB. ч.т.д

(доказать, что NMKC - квадрат, можно через площадь треугольника ABC (прямоугольного)): Возьмём $MC = NK = x$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot MC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x = x^2$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$ (Пусть $AN = NC = CK = BK = y$, тогда в прямоуг Δ CNM: $y = \sqrt{\frac{x^2}{2}} = x\sqrt{\frac{1}{2}}$; $AC = BC = 2y$).

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2x\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 2x\sqrt{\frac{1}{2}} = x^2$ - верно

$\Rightarrow$ действительно, NMKC - квадрат

Задание 3.

Дано: a, b, c - неотрицательные числа

5б

Д-ть: $(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \leq 3(a+b+c)$

Доказательство $(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \leq 3(a+b+c)$

$a + b + c + \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc} \leq 3(a+b+c)$

$2(a+b+c) \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}) \; / :2$

$a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$

1) при $a = b = c = 0$: $0+0+0 = 0+0+0$

$0=0$ верно

2) при $a = b = c = 1$, $3 = 3$, верно

3) при $a=b=c=2$, $6=6$, верно

4) при $a=b=c=K$, $3K=3K$, верно

=> таким образом, для любых неотриц. равных чисел выполняется данное неравенство

5) $a-\sqrt{ab}+b-\sqrt{bc}+c-\sqrt{ac}\geq 0$

$\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})+\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{c})+\sqrt{c}(\sqrt{c}-\sqrt{a})\geq 0$

Если $a>b>c$, то $\underset{\geq 0}{\smile}+\underset{\geq 0}{\smile}+\underset{\geq 0}{\smile}\geq 0$ - верно

Если $b>a>c$, то $\underset{\geq 0}{\smile}+\underset{\geq 0}{\smile}+\underset{\geq 0}{\smile}$ и т.д...

Таким образом, для любых неотриц чисел выполняется данное неравенство.

3с

Задание 2.

Дано: последовательность $X_n = 1+2^n+3^n+4^n+5^n$

Найти: возможно ли найти такую последовательность, что каждое из этих пяти чисел будет делиться на 2025.

Решение: рассмотрим последовательность: $X_n = 1^n+2^n+3^n+4^n+5^n$

Число $\underline{1}$, возведённое в любую степень, равна $\underline{1}$

=> нельзя найти такую последовательность, чтобы каждое из пяти чисел делилось на 2025, т.к первое число в данной последовательности (1), возведённое в любую степень, равна 1, а $1 \not\vdots 2025$ $(1^n \not\vdots 2025)$.

Ответ: нельзя

Задание 4.

Дано: многочлены x^2+p_1x+1 и x^2+p_2x+1;

скобы

Шифр 7344

x_1, x_2, x_3, x_4 – их корни (общее кол-во)

Доказать: $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4) = p_2^2 - p_1^2$

Доказательство: рассмотрим данные многочлены и найдём их корни по теореме Фалеса:

1) $x^2 + p_1 x + 1 = 0$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -p_1 \end{cases}$$

2) $x^2 + p_2 x + 1 = 0$

$$\begin{cases} x_3 \cdot x_4 = 1, \\ x_3 + x_4 = -p_2 \end{cases}$$

$$p_2^2 - p_1^2 = (-p_2)^2 - (-p_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - (x_3 + x_4)^2 =$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1 + x_2 - x_3 - x_4).$$

$\Rightarrow$ доказать, что: $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) =$
$= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$

6б

докажем это:

$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1 - x_2 - x_3 - x_4) = x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4$
$+ x_2x_1 - x_2^2 - x_2x_3 - x_2x_4 + x_1x_3 - x_2x_3 - x_3^2 - x_3x_4 +$
$+ x_1x_4 - x_2x_4 - x_3x_4 - x_4^2$ (1)

$(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) = (x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$
$+ x_3^2)(x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_4^2) = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_2x_3$
$+ \ldots$ (2)

(1) = (2) $\Rightarrow (x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) = p_2^2 - p_1^2$

ч.т.д.

Задание 1.

$2y^2 - xy - x^2 + 2y + 7x - 84 = 0$

$y^2 - x^2 + y^2 + 2y + 7x - xy - 7 - 77 = 0$

$(y - x)(x + y) + y^2 - x^2 + x^2 + 2y + 7x - xy + 84 = 0$

10б

скобы

Шифр 7344

Продолжение к заданию 1

$(y-x)(x+y) + (y-x)(x+y) + 2y + 7x - xy - 84 + x^2 = 0$

$2(y-x)(x+y) + 2y - xy + 7x - 84 + x^2 = 0$

$2(y-x)(x+y) + x^2 - xy - xy + 2y + xy + 7x - 84 = 0$

$2(y-x)(x+y) + x^2 - 2xy + y^2 + xy - y^2 + 2y + 7x -$
$- 84 = 0$

$2(y-x)(x+y) + (x-y)^2 - y^2 + xy + 2y + 7x - 84 = 0$

$2(y-x)^3(x+y) - y^2 + xy + 2y + 7x - 84 = 0$

...