ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004412

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	М А К С И М О В И Ч
	Имя	К И Р И Л Л
	Отчество	В И Т А Л Ь Е В И Ч
5.	Дата рождения	2 5 (число) 0 3 (месяц) 2 0 0 3 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Ростовская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Ростов-на-Дону
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ Лицей 103

004412

лист-1.

№2.

$$\sin(2x)+\sin^5(2x)+2020\cdot\sin^9(2x)=\cos(4x)+\cos^5(4x)+2020\cdot\cos^9(4x)$$

Зададим функцию $f(t)$:

$$f(t)=t+t^5+2020\cdot t^9$$

$y_1=t$ – монотонно возрастающая функция

$y_2=t^5$ – монотонно возрастающая функция

$y_3=2020t^9$ – монотонно возрастающая функция.

сумма монотонных функций монотонна $\Rightarrow$

$f(t)=t+t^5+2020t^9$ – монотонно возраст. функция

$\Rightarrow$ тогда преобразуем исходное уравнение:

$$f(\sin 2x)=f(\cos 4x)$$

Поскольку обе функции монотонны, то их равенство достигается при равенстве ~~их~~ аргументов:

$$\sin 2x=\cos 4x$$

$\cos 4x=1-2\sin^2 2x \Rightarrow \sin 2x=1-2\sin^2 2x$

$$2\sin^2 2x+\sin 2x-1=0$$

1	2	3	4	5	Σ
4	6	2	4	5	21

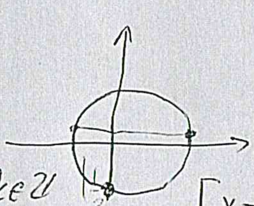
Пусть $\sin 2x=t \Rightarrow 2t^2+t-1=0$

$$D=1+8=9=3^2$$

$$t_1=\frac{-1-3}{4}=-1$$

$$t_2=\frac{1}{2}$$

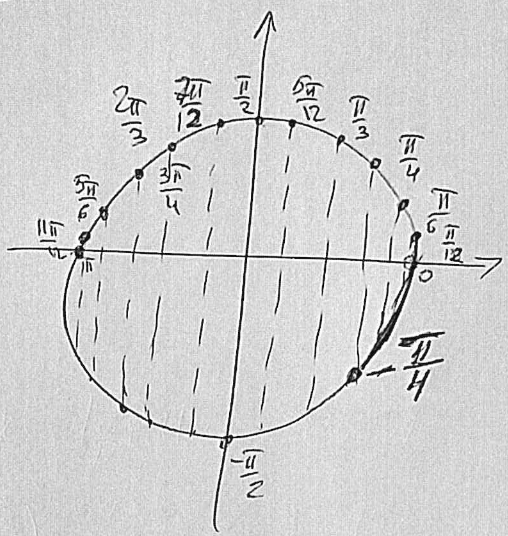
14.01.21



$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=-1\\ \sin 2x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k & k\in\mathbb{Z}\\ 2x=\frac{\pi}{6}+2\pi m & m\in\mathbb{Z}\\ 2x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n & n\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+\pi k\\ x=\frac{\pi}{12}+\pi m \quad (k,m,n)\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{5\pi}{12}+\pi n\end{array}\right.$$

Продолжение №2. | лист-2. | 004412

$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k \\ x = \dfrac{\pi}{12} + \pi m \qquad (k, m, n) \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + \pi n \end{array}\right.$$



Объединяя точки получим:

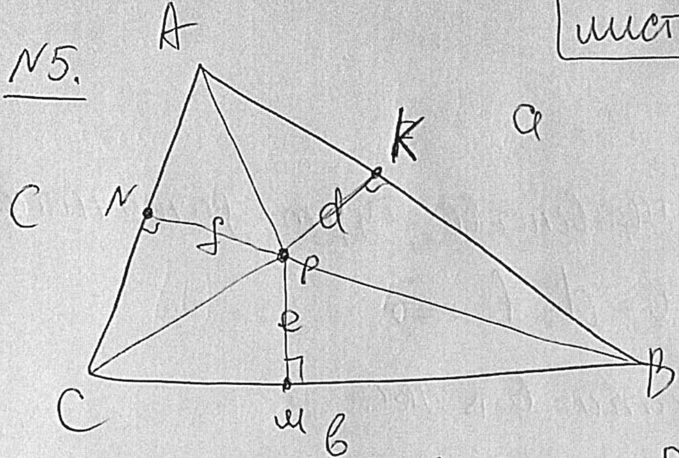
$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$

№5.

лист-3.

004412



Пусть $AB=a$, $BC=b$; $CA=C$; $PK=d$; $PM=e$; $PN=f$

Найти: $\min\left(\frac{b}{e}+\frac{c}{f}+\frac{a}{d}\right)$ - ?

Решение:

1) $S_{ABC}=S_{APC}+S_{APB}+S_{CPB}=\frac{1}{2}\cdot f\cdot c+\frac{1}{2}d\cdot a+\frac{1}{2}e\cdot b \quad \Big|\cdot 2$

$2S_{ABC}=fc+ad+eb \quad (1)$

2) умножим равенство (1) на $\left(\frac{b}{e}+\frac{c}{f}+\frac{a}{d}\right)$:

$2\left(\frac{b}{e}+\frac{c}{f}+\frac{a}{d}\right)S_{ABC}=\left(\frac{b}{e}+\frac{c}{f}+\frac{a}{d}\right)(fc+da+eb)$

Преобразуем правую часть:

$$\frac{bfc}{e}+c^2+\frac{afc}{d}+\frac{abd}{e}+\frac{acd}{f}+a^2+b^2+\frac{ceb}{f}+\frac{aeb}{d}=$$

$$=a^2+b^2+c^2+ab\left(\frac{d}{e}+\frac{e}{d}\right)+bc\left(\frac{f}{e}+\frac{e}{f}\right)+ac\left(\frac{f}{d}+\frac{d}{f}\right).$$

$\frac{d}{e}$ и $\frac{e}{d}$; $\frac{f}{e}$ и $\frac{e}{f}$; $\frac{f}{d}$ и $\frac{d}{f}$ - взаимно обратные числа, по неравенству о средних (числа положительны), то

$\frac{d}{e}+\frac{e}{d}\geqslant 2$; $\frac{f}{e}+\frac{e}{f}\geqslant 2$; $\frac{f}{d}+\frac{d}{f}\geqslant 2$.

Тогда: $a^2+b^2+c^2+ab\left(\frac{d}{e}+\frac{e}{d}\right)+bc\left(\frac{f}{e}+\frac{e}{f}\right)+ac\left(\frac{f}{d}+\frac{d}{f}\right)\geqslant$

$\geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$

лист-4

Продолжение №5.

Минимальное значении в неравенстве будет достигаться при равенстве обеих частей $\Rightarrow \ell = d = f \Rightarrow$??

P – центр вписанной окружности в $\triangle ABC$.

Ответ: P – центр впис. окружности.

$\mp$

$\boxed{\text{лист-5}}$

<u>№3</u>. $p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$, $n > 1$, $n \in \mathbb{Z}$

по т. Виета для многочлена n-ой степени:

$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n = -5$

$t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot \ldots \cdot t_n = 3$

t_k - корни

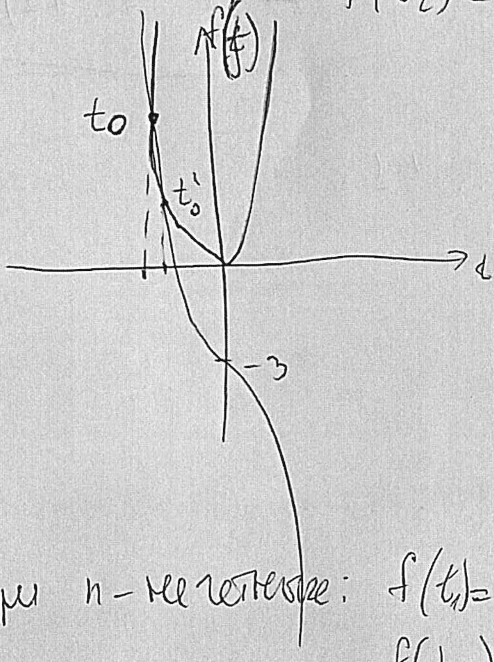
$k \in [1; k]$ - целые

$t^n + 5t^{n-1} + 3 = 0$

$t^n = -5t^{n-1} - 3$

<u>при n четных</u>: $f(t_1) = t^n$

$f(t_2) = -5t^{n-1} - 3$

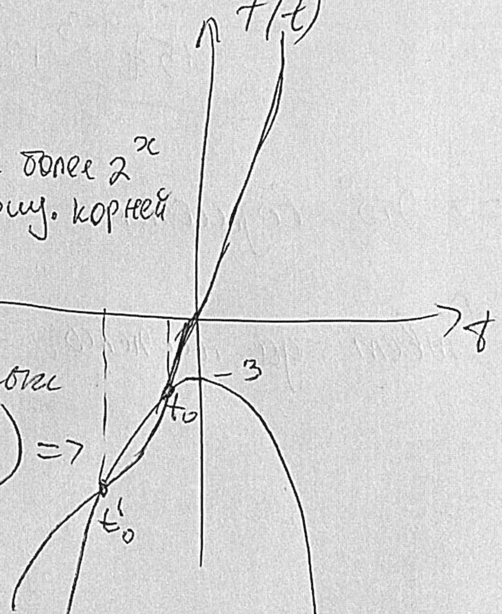


Не более двух отрицательных t

При n - нечетных: $f(t_1) = t^n$

$f(t_2) = -5t^{n-1} - 3$

=> не более $2^х$ отриц. корней



Т.к. по т. Виета количество отрицательных корней четно (т.к. их произведение 3) =>

=> 2 отрицательных корня

продолжение №3.

лист-6.

$$\begin{cases} t_1 \cdot t_2 = -5 \\ t_1 \cdot t_2 = 3 \end{cases}$$ => уравнение t^2+5t+3 имеет такие же решения с $p(t)$:

$D = 25 - 12 = 13 = (\sqrt{13})^2$ $\sqrt{13} \approx 3,6$

$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

$t_1 = \frac{-5-\sqrt{13}}{2} < 0$

=> оба корня < 0 => из ~~множества~~ многочлена $p(t)$ можно выделить множитель (t^2+5t+3), а второй будет: $(t^{n-2} - 3t^{n-4} + \ldots + 1)$

$t_2 = \frac{-5+\sqrt{13}}{2} < 0$

$$\begin{array}{l} t^n + 5t^{n-1} + 3 \quad \Big| \; t^2 + 5t + 3 \\ -\; t^n + 5t^{n-1} + 3t^{n-2} \quad t^{n-2} - 3t^{n-4} + 15^{n-5} + \ldots + 1 \\ \hline \quad -3t^{n-2} + 3 \\ \quad -\; -3t^{n-2} - 15t^{n-3} \\ \hline \quad\quad 15t^{n-3} + 3 \\ \quad\quad -\; 15t^{n-3} + 3 \cdot 15^{n-5} \\ \hline \quad\quad\quad \ldots \end{array}$$

=> это возможно

Ответ: да, можно.

лист - 7

№4. $$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x^3+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} - \frac{\sqrt[3]{2020^4}\, x}{m+x^3}$$

все $m>0$, при кот-ых $x>0$ существуют

пусть $\sqrt[3]{2020^4}\cdot x = n$

$$\frac{x^3}{m+n} + \frac{m}{x^3+n} + \frac{n}{m+x^3} \le \frac{3}{2}\ :$$

Сумма и отношение положительных чисел положительно =>

$$\frac{1}{\frac{x^3}{m+n} + \frac{m}{x^3+n} + \frac{n}{m+x^3}} \ge \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{\frac{x^3}{m+n} + \frac{m}{x^3+n} + \frac{n}{m+x^3}} \ge 2 \quad (1)$$

По неравенству о средних ?? $\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \le \frac{x+y+z}{3}$

равенство достигается при $x=y=z$ => из (1) получим:

$$\frac{m+n}{x^3} + \frac{x^3+n}{m} + \frac{m+x^3}{n} \ge \frac{3}{\frac{x^3}{m+n} + \frac{m}{x^3+n} + \frac{n}{m+x^3}} \ge 2$$?

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{m+n}{x^3} + \frac{x^3+n}{m} + \frac{m+x^3}{n}\right) \ge 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{m}{x^3} + \frac{n}{x^3} + \frac{x^3}{m} + \frac{n}{m} + \frac{m}{n} + \frac{x^3}{n}\right) \ge 2$$

продолжение №4.

По неравенству о средних: $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$?

$\Rightarrow \frac{m}{x^3}+\frac{x^3}{m}\geqslant 2$

$\frac{n}{x^3}+\frac{x^3}{n}\geqslant 2$

$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\geqslant 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\Bigg(\underbrace{\frac{m}{x^3}+\frac{x^3}{m}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{n}{m}+\frac{m}{n}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{n}{x^3}+\frac{x^3}{n}}_{\geqslant 2}\Bigg)\geqslant 2 \quad (2)$$

Заметим что оценка в (2) достигается при тех же условиях, что и в исходном:

$$\begin{cases} x^3=m \\ m=n \\ x^3=n \end{cases} \Rightarrow x^3=\sqrt[3]{2020^4 x} \text{ (поскольку } x>0)$$

$x^2=\sqrt[3]{2020^4}$

$x=\sqrt[3]{2020^2}$, что >0

$\Rightarrow m=2020^2$

Ответ: 2020^2

лист-9

№1. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$; $x-\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$

Заметим, что 1 и 3 число обратными знаку.
Обозначим первое число A_1, второе – A_2, третье – $-A_1$

$A_1+A_2 = x-\frac{1}{x^2+2021}$ – должно быть целое.

Заметим, что если все числа целые, то их сумма тоже целая.

$\frac{1}{x^2+2021}$ – дробь <1

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$x-\frac{1}{x^2+2021}$ целое и $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$ целое (A_1) =>
у них одинаковые дроби (дробные части) ~~, а это возможно~~ ~~когда~~ (если у A_1+A_2 $\frac{1}{x^2+2021}$ др. часть, то и у A_1 $\frac{1}{x^2+2021}$ – др. часть числа), а это возможно если $\frac{1}{x}=$
$=\frac{1}{x^2+2021}$ => $x^2+2021=x$
$x^2-x+2021=0$ => $D<0$ => нет корней, =>
=> этого быть не может.

$\frac{1}{x^2+2021}$ дробь <1 => число $\left(x-\frac{1}{x^2+2021}\right)$ и у числа
x – такая же дробная часть, как у $\frac{1}{x}$ =>

лист - 10

Продолжение №1.

$\Rightarrow$ это возможно только при $x = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $x = \pm 1$

Подставим $x = 1$:

$1 - \frac{1}{1+2021}$ - не целое $\Rightarrow$ неверно

$x = -1$:

$-1 - \frac{1}{1+2021}$ - не целое $\Rightarrow$ неверно.

Ф