

Место для
скобы

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА
ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

003517

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА																				
2.	Вариант	1																				
3.	Класс	11																				
4.	Фамилия	М	А	Х	Н	Е	В	А														
	Имя	А	Л	Е	К	С	А	Н	Д	Р	А											
	Отчество	Е	В	Г	Е	Н	Ь	Е	В	Н	А											
5.	Дата рождения	1	3			0	7			2	0	0	3									
		Число		Месяц		Год																
6.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	ТОМСКАЯ ОБЛАСТЬ																				
7.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	СЕЛО																				
8.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Асино)	БАКЗАР																				
9.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ БАКЗАРСКАЯ СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА																				

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e-mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись _____

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
195	3.04.21	Тендрович И.Ю.	

Задача 1.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 2021}; \quad x - \frac{1}{x}; \quad \frac{1}{x^2 + 2021} - \frac{1}{x}$$

75

Сначала возьмём стандартное число 1 за x .

Если $x=1$, то $x - \frac{1}{x} = 0$ - целое, а $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 2021}$ - нет, следовательно $\frac{1}{x^2 + 2021} - \frac{1}{x}$ - тоже, т.к. поменялись только знаки.

Если $x \neq 1$, тогда приведём к общему знаменателю

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 2021} = \frac{x^2 - x + 2021}{x(x^2 + 2021)}$$

Рассмотрим квадратный трёхчлен $x^2 - x + 2021$, найдём корни через дискриминант.

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2021 < 0$$

- при отрицательном корнем нет, следовательно $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 2021}$ не целое.

Получается, какой бы не брали x , тут числа всё равно не являются целыми!

Ответ: не существует.

Задача 2.

$$\sin x + \sin^3 x + 2020 \cdot \sin^5 x = \cos(2x) + \cos^3(2x) + 2020 \cdot \cos^5(2x)$$

У $\sin x$ и $\cos(2x)$ нечётные степени, следовательно сложившие равенства преобразуем

$$\sin x = 1 - 2\sin^2 x,$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

75

Сделаем замену $\sin x$ на a , $|a| \leq 1$

$$2a^2 + a - 1 = 0$$

$$D = (-1)^2 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 (3^2)$$

$$a_1 = -1; \quad a_2 = \frac{1}{2}$$

Сделаем возврат.

$$\sin x = 1$$

1	2	3	4	5
4	7	5	0	0

$$x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 3.

~~$$f(x) = x^n + 5x$$~~

$$f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3, n > 1$$

Если $n=2$, то $f(x) = x^2 + 5x + 3$

С помощью дискриминанта найдем корни

$$D = 16^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 13$$

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}; x_2 = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}, \text{ следовательно}$$

$$x^2 + 5x + 3 = \left(x - \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}\right) \left(x - \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}\right)$$

Все корни г.д. целыми.

Если $n > 2$, то корни ищем среди делителей числа $3: \pm 1; \pm 3$

Если $x=1$, то $(x^n + 5x^{n-1} + 3) : (x-1)$

Решим столбиком

~~$$\begin{array}{r}
 x^n + 5x^{n-1} + 3 \quad | \quad x-1 \\
 -x^n - x^{n-1} \\
 \hline
 +6x^{n-1} + 3 \\
 -6x^{n-1} - 6x^{n-2} \\
 \hline
 +6x^{n-2} + 6x^{n-3}
 \end{array}$$~~

$$\begin{array}{r}
 x^n + 5x^{n-1} + 3 \quad | \quad x-1 \\
 -x^n - x^{n-1} \\
 \hline
 6x^{n-1} + 3 \\
 -6x^{n-1} - 6x^{n-2} \\
 \hline
 6x^{n-2} + 3 \\
 -6x^{n-2} - 6x^{n-3} \\
 \hline
 6x^{n-3} + 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6x^{n-1} + 3 \\
 -6x^{n-1} - 6x^{n-2} \\
 \hline
 6x^{n-2} + 3 \\
 -6x^{n-2} - 6x^{n-3} \\
 \hline
 6x^{n-3} + 3
 \end{array}$$

$6 \neq 3 \Rightarrow x=1$ - не корни

Если $x=-1$, то $(x^n + 5x^{n-1} + 3) : (x+1)$

Решим столбиком

$$\begin{array}{r}
 x^n + 5x^{n-1} + 3 \quad | \quad x+1 \\
 -x^n + x^{n-1} \\
 \hline
 4x^{n-1} + 3 \\
 -4x^{n-1} + 4x^{n-2} \\
 \hline
 4x^{n-2} + 3 \\
 -4x^{n-2} + 4x^{n-3} \\
 \hline
 4x^{n-3} + 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -4x^{n-1} + 3 \\
 -4x^{n-2} - 4x^{n-3} \\
 \hline
 4x^{n-3} + 3 \\
 -4x^{n-3} + 4x^{n-4} \\
 \hline
 4x^{n-4} + 3.
 \end{array}$$

Числовой коэффициент у x не равен 3, следовательно $x = -1$ не корень.

Если $x = 3$, то $(x^n + 5x^{n-1} + 3) : (x-3)$

$$\begin{array}{r}
 x^n + 5x^{n-1} + 3 \quad | \quad x-3 \\
 -x^n - 3x^{n-1} \\
 \hline
 8x^{n-1} + 3 \\
 -8x^{n-1} - 24x^{n-2} \\
 \hline
 24x^{n-2} + 3 \\
 -24x^{n-2} - 72x^{n-3} \\
 \hline
 72x^{n-3} + 3
 \end{array}$$

Числовые коэффициенты увеличиваются, следовательно деление цело не произойдет.

Если $x = -3$, то $(x^n + 5x^{n-1} + 3) : (x+3)$

$$\begin{array}{r}
 x^n + 5x^{n-1} + 3 \quad | \quad x+3 \\
 -x^n - 3x^{n-1} \\
 \hline
 2x^{n-1} + 3 \\
 -2x^{n-1} - 6x^{n-2} \\
 \hline
 -6x^{n-2} + 3 \\
 -6x^{n-2} - 18x^{n-3} \\
 \hline
 -54x^{n-3} + 3
 \end{array}$$

Модуль числового коэффициента увеличивается, следовательно деление цело не произойдет.

Значит $f(x)$ в виде произведения при $n > 2$ разложить нельзя.

Ответ: возможно только при $n = 2$.