Место для скобы

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004264

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	2
3.	Класс	10
4.	Фамилия	МАХАТЫРОВА
	Имя	ДИАНА
	Отчество	ВАСИЛЬЕВНА
5.	Дата рождения	Число: 19; Месяц: 05; Год: 2004
6.	Страна	РОССИЯ
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	РЕСПУБЛИКА САХА (ЯКУТИЯ)
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	ЯКУТСК
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	ГБНОУ РС(Я) РЛИ

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ____________

Место для скобы

Шифр 004264

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
35 б	15.04.21	Гендрина И.Ю.	

$\boxed{1}$ Пусть такое x – существует.

Тогда все 3 числа целые.

$$(\underbrace{\sqrt{x^2+2020}-x}_{\text{целое}})+(\underbrace{2x-\sqrt{x^2+2020}}_{\text{целое}})=x$$

$$\Downarrow$$

x – целое.

$\sqrt{x^2+2020} - \underbrace{x}_{\text{целое}} = \text{целое} \Rightarrow \sqrt{x^2+2020}$ - целое

$\sqrt{x^2+2} - \underbrace{\sqrt{x^2+2020}}_{\text{целое}} = \text{целое} \Rightarrow \sqrt{x^2+2}$ целое

$\sqrt{x^2+2}$ целое

$x^2+2>0$ целое (т.к x - целое) $(x^2>0)$

$\}$ $x^2+2=a^2$ где a – целое.

$x^2+2=a^2$

$a^2-x^2=2$

$(a-x)(a+x)=2$

$2=1\cdot 2=(-1)\cdot(-2)$ Всего 4 случая

1. $a-x=1$
$a=x+1$
$a+x=2x+1$
$a+x=2$
$2x+1=2$
$x=0,5$
но x – целое
противорение

2. $a-x=2$
$a=x+2$
$a+x=2x+2$
$a+x=1$
$2x+2=1$
$x=-0,5$
но x-целое
противорение

3. $a-x=-1$
$a=x-1$
$a+x=2x-1$
$a+x=-2$
$2x-1=-2$
$x=-0,5$
но x-целое
противорение

4. $a-x=-2$
$a=x-2$
$a+x=2x-2$
$a+x=-1$
$2x-2=-1$
$x=0,5$
но x-целое
противорение

Во всех 4 случаях мы получили противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ такого x не существует

7 б

Ответ: Не существует.

1	2	3	4	5
7	7	7	7	7

Место для скобы

Шифр 004264

$\boxed{3.}$ $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(0) = c$
$f(1) = a + b + c$
$f(2) = 4a + 2b + c$
$f(3) = 9a + 3b + c$

1. $f(0) + f(1) = 0$
$a + b + 2c = 0 = c + (a+b+c)$

2. $f(2) + f(3) = 0$
$13a + 5b + 2c = 0 = (4a + 2b + c) + (9a + 3b + c)$

3. $(13a + 5b + 2c) - (a + b + 2c) = 0$
$12a + 4b = 0$
$12a = -4b$
$-\frac{b}{a} = \frac{12}{4} = 3.$

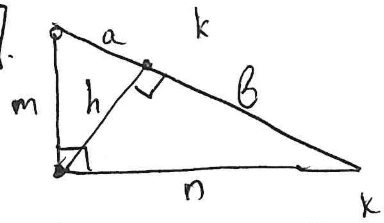
$f(x) = 2020$
$ax^2 + bx + c - 2020 = 0.$ $\quad | : a \quad a \neq 0$ старший коэффициент.
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c-2020}{a} = 0.$

По теореме Виета сумма корней уравнения $-\frac{b}{a} = 3.$

Ответ: 3.

7 б

$\boxed{5}$



$k = a + b.$
(!) Пусть это возможно, то есть:
$k + h < m + n$
Высота прямоугольного треугольника к гипотенузе равна $h = \sqrt{ab}$

$k + h = a + b + \sqrt{ab}$
~~$m+n=$~~ $m = \sqrt{a^2 + ab} = \sqrt{a(a+b)}$
$n = \sqrt{b^2 + ab} = \sqrt{b(a+b)}$
$m + n = \sqrt{a(a+b)} + \sqrt{b(a+b)} = \sqrt{a+b}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})$
$(k+h)^2 = k^2 + 2kh + h^2$
$(m+n)^2 = (a+b)(a + 2\sqrt{ab} + b) = k(k + 2h) = k^2 + 2hk$
$(k+h), (m+n) \geq 0$
А значит мы можем сравнить их ч/з их квадраты
$k^2 + 2kh + h^2 < k^2 + 2kh.$
$h^2 < 0$
неверно, т.к ~~любой~~ квадрат $\forall$ числа $\geq 0.$
Противоречие. А значит $(k+h) \geq m + n.$
Ответ: Не возможно.

7 б

Место для скобы

Шифр 004264

4. $\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}}+\sqrt[2020]{2021\cdot 2019^{-1}}>2$

$$\sqrt[2020]{\frac{2020}{2021}}+\sqrt[2020]{\frac{2021}{2019}}>2.$$

$$\frac{\sqrt[2020]{\frac{2020}{2021}}+\sqrt[2020]{\frac{2021}{2019}}}{2}>1$$

т.к оба слагаемых не отрицательные. применим неравенство о средних $\left(\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\right)$

$$\frac{\sqrt[2020]{\frac{2020}{2021}}+\sqrt[2020]{\frac{2021}{2019}}}{2}\geq\sqrt[2]{\sqrt[2020]{\frac{2020}{2021}\cdot\frac{2021}{2019}}}$$

$$\frac{\sqrt[2020]{\frac{2020}{2021}}+\sqrt[2020]{\frac{2021}{2019}}}{2}\geq\sqrt[4040]{\frac{2020}{2019}}.$$

если мы докажем что $\sqrt[4040]{\frac{2020}{2019}}>1$

то первоначальное неравенство доказано.

$\sqrt[4040]{\frac{2020}{2019}}=n>0$

$n^{4040}=\frac{2020}{2019}>1$

$n^{4040}>1.$

Мтд от противного пусть $n\leq 1$

$n\leq 1 \quad |\cdot n>0$

$n^2\leq n\leq 1 \Rightarrow n^2\leq 1$

Если продолжать возводить n в степень то она будет не больше единицы всегда. по индукции.

А значит $n^{4040}\leq 1$ если $n\leq 1$

противоречие т.к $n^{4040}>1.$

А значит $\sqrt[2020]{\frac{2020}{2019}}>1$ ч.и.т.д

$\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}}+\sqrt[2020]{2020\cdot 2019^{-1}}\geq 2\cdot\sqrt[2020]{\frac{2020}{2019}}>2\cdot 1=2.$

что и требовалось доказать

7б

Место для скобы

Шифр 4264

$\boxed{2.}$ $\begin{cases} 5xy + yz + 2xz = -x \\ 14xy + 3yz + 5xz = -4x \\ 2xy + xz = 4x \end{cases}$

$2xy + xz = 4x$

$x(2y + z - 4) = 0$

$x = 0$ или $2y + z = 4$.

1. если $x = 0$

$\begin{cases} yz = 0 \\ 3yz = 0 \end{cases}$

Значит: $x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0$

$x = 0 \quad y = 0 \quad z = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$x = 0 \quad y = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \quad z = 0$.

Всего 3 решения.

2. если $2y + z = 4$.

$\begin{cases} 5xy + yz + 2xz = -x \quad | \cdot 3 \\ 14xy + 3yz + 5xz = -4x \end{cases}$

$\begin{cases} 15xy + 3yz + 6xz = -3x \\ 14xy + 3yz + 5xz = -4x \end{cases}$

$(15xy + 3yz + 6xz) - (14xy + 3yz + 5xz) = -3x + 4x$

$xy + xz = x$

$x(y + z - 1) = 0$

$x = 0$ или $y + z - 1 = 0$

рассмотрели $\quad y = 1 - z$

$2y + z = 4$

$2(1 - z) + z = 4$

$2 - 2z + z = 4$

$z = -2$

$y = 1 - z = 1 - (-2) = 3$.

$\begin{cases} 5xy + yz + 2xz = -x \\ 2xy + xz = 4x \quad | \cdot 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 5xy + yz + 2xz = -x \\ 4xy + 2xz = 8x. \end{cases}$

$(5xy + yz + 2xz) - (4xy + 2xz) = \cancel{8} - x - 8x$

$xy + yz = -9x$

$x \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = -9x$.

$-12x = -6$

$x = \frac{1}{2}$.

1 решение: $x = \frac{1}{2}$, $y = 3$, $z = -2$.

7 б

Ответ: 4 решение:

$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0$

$x = 0 \quad y = 0 \quad z \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$x = 0 \quad y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \quad z = 0$

$x = \frac{1}{2} \quad y = 3 \quad z = -2$.