ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

07282

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

| | |
|---|---|
| мет | МАТЕМАТИКА |
| нт | 1 |
| | 9 |
| лия | ЛЯМИН |
| | ЕГОР |
| тво | ВАЛЕРЬЕВИЧ |
| рождения | 06 (Число) 03 (Месяц) 2007 (Год) |
| а | РОССИЯ |
| н (пр: Томская обл., инградская область) | КРАСНОЯРСКИЙ КРАЙ |
| ниципального образования г, деревня, село, город) | ГОРОД |
| енный пункт (пр: Томск, ово, Псков) | КРАСНОЯРСК |
| е наименование вательного учреждения, ром Вы обучаетесь в е время | МАОУ „Гимназия № 13 „Академ" |

асие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail зультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

*Личная подпись* Леб

Шифр 07282

**Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)**

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. членов жюри | Подписи членов жюри |
|---|---|---|---|
| 24 | | Емельянова | [signature] |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| – | 6 | 4 | 7 | 7 | 24 |

Задание 2

Т.к. $X_n$ должно делиться на 2025, оно как минимум должно делиться на 5, т.е. заканчиваться на 0 или 5.

$$X_n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$$

Распишем $X_n$ как сумму чётных/нечётных чисел (соответствующих слагаемым), Ч – чётное, НЧ – нечётное:

$$X_n = НЧ + Ч + НЧ + Ч + НЧ$$

Соответственно, $X_n$ – нечётное число, т.е. должно заканчиваться на 5.

Т.к. ~~любая~~ $5^n$ всегда заканчивается на 5, $X_n - 5^n$ должно заканчиваться на 0, т.е. $1 + 2^n + 3^n + 4^n$ заканчивается на 0. Значит сумма цифр, на которые заканчиваются эти слагаемые, должна заканчиваться нулём.

Распишем четвёрки ~~чисел~~ цифр, на которые слагаемые могут заканчиваться:

~~число, которому кратен показатель степени~~

| | 1 | $2^n$ | $3^n$ | $4^n$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 4 | 9 | 6 |
| 2 | 1 | 8 | 7 | 4 |
| 3 | 1 | 6 | 1 | 6 |
| 4 | | | | |

~~ассоциировано~~ 2?

Эти четыре четвёрки будут повторятся в данном порядке.? При этом на 0 заканчивается только сумма трёх четвёрок (сумма последней заканчивается на 4), соответственно, максимум при трёх подряд идущих n будет выполняться это условие, при пяти – нет.

Ответ: нельзя.

Задание 4

см. след. страницу

Место для скобы

Шифр 07282

Т.к. нам по условию дано что каждый из многочленов имеет два корня мы можем воспользоваться теоремой, обратной теореме Виета, т.е.:

$\cancel{x_1x_2 =}$ В $x^2+p_1x+1$ В $x^2+p_2x+1$

$x_1x_2 = \frac{c}{a} = 1$ $x_3x_4 = \frac{c}{a} = 1$

$(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_4) = (x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 + x_3^2)\cdot$

$\cdot \cancel{(x_1+x_4)(x}(x_1x_2+x_1x_4+x_2x_4+x_4^2) = (1-x_1x_3-x_2x_3+x_3^2)\cdot$

$\cdot(1+x_1x_4+x_2x_4+x_4^2) = 1+x_1x_4+x_2x_4+x_4^2 - x_1x_3 -$

$- x_1^2x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4 - x_1x_3x_4^2 - x_2x_3 - x_1x_2x_3x_4 - x_2^2x_3x_4 -$

$- x_2x_3x_4^2 + x_3^2 + x_1x_3^2x_4 + x_2x_3^2x_4 + x_3^2x_4^2 = 1 + x_1x_4 + x_2x_4 +$

$+ x_4^2 - x_1x_3 - x_1^2 - 1 - x_1x_4 - x_2x_3 - 1 - x_2^2 - x_2x_4 + x_3^2 + x_1x_3 +$

$+ x_2x_3 + 1 = x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = (x_4^2+x_3^2) - (x_2^2+x_1^2)$

В $x^2+px+1$ В $x^2+p_2x+1$

$D = p_1^2-4$ $D = p_2^2-4$

Т.к. в обоих многочленах два корня, то $D > 0$ и мы можем расписать корни как:

$x_{1,2} = \frac{-p_1\pm\sqrt{p_1^2-4}}{2}$ $x_{3,4} = \frac{-p_2\pm\sqrt{p_2^2-4}}{2}$

Продолжим преобразования:

$$(x_4^2+x_3^2)-(x_2^2+x_1^2) = \left(\left(\frac{-p_2+\sqrt{p_2^2-4}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-p_2-\sqrt{p_2^2-4}}{2}\right)^2\right) -$$

$$- \left(\left(\frac{-p_1+\sqrt{p_1^2-4}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-p_1-\sqrt{p_1^2-4}}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{(p_2^2-4)-2p_2\sqrt{p_2^2-4}+p_2^2}{4} +\right.$$

$$\left. + \frac{(p_2^2-4)+2p_2\sqrt{p_2^2-4}+p_2^2}{4}\right) - \left(\frac{(p_1^2-4)-2p_1\sqrt{p_1^2-4}+p_1^2}{4} +\right.$$

$$\left. \frac{(p_1^2-4)+2p_1\sqrt{p_1^2-4}+p_1^2}{4}\right) = \left(\frac{4p_2^2-8}{4}\right)-\left(\frac{4p_1^2-8}{4}\right) =$$

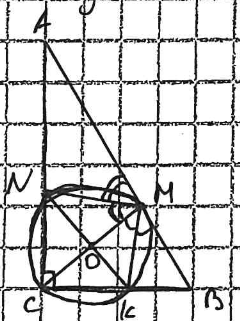
$$= (p_2^2-2)-(p_1^2-2) = p_2^2-p_1^2$$

ч.т.д.

скобы

Шифр 07282

Задание 5




Дано: $\triangle ABC$; $M \in AB$; $MK$ - биссектриса $\angle BMC$; $MN$ - биссектриса $\angle AMC$; $K \in CB$; $N \in AC$; $CM = KN$

Доказать: $AM = MB$

Доказательство:

1) $\angle AMN + \angle NMC + \angle CMK + \angle KMB = 180°$

~~$2\angle AMN + 2\angle CMK = 180°$~~

$2\angle NMC + 2\angle CMK = 180°$

$\angle NMC + \angle CMK = 90°$

~~$\angle C = 90°$~~ $\angle NMC = 90°$

2) Построим окружность с центром O, где NK - диаметр. Т.к. $\angle NMK$ опирается на NK и $\angle NMK = 90°$, то $M \in$ окружности. Аналогично $C \in$ окружности.

$\left.\begin{array}{l} N \in \text{окружности} \\ M \in \text{окружности} \\ C \in \text{окружности} \end{array}\right\} \Rightarrow$ окружность описана около $\triangle CNM$

Т.к. $\angle CNM$ опирается на CM, а $CM = NK = D$, $\angle CNM = 90°$

3) $\left.\begin{array}{l} \angle NMC = 90° \text{ (по п. 1)} \\ \angle CNM = 90° \text{ (по п. 2)} \\ \angle C = 90° \text{ (по усл.)} \end{array}\right\} \Rightarrow$

CNMK - прямоугольник

⇓

4) $NM \parallel CB$

$AC \parallel MK$

⇓

5) $\angle ACM = \angle CMK = \angle KMB$ (как накрест лежащие, $AC \parallel MK$, MC - секущая)

$\angle A = \angle KMB$ (как соответ., $AC \parallel MK$, AB - секущая).

⇓

$\triangle AMC$ - равнобедр. (по призн. равнобедр. треугольн.)

⇓

NM - биссектриса, высота, медиана (по св-ву равнобедр. треугол.)

$\Rightarrow AN = NC$

6) $\left.\begin{array}{l} NM \parallel CB \text{ (по п. 4)} \\ AN = NC \text{ (по п. 5)} \end{array}\right\} \Rightarrow$ NM - средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow$

$AM = MB$

ч. т. д.

скобы

Шифр 7282

Задание 3

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \le 3(a+b+c)$$

$$(\sqrt{a} + (\sqrt{b} + \sqrt{c}))^2 \le 3(a+b+c)$$

$$a + 2\sqrt{a}(\sqrt{b} + \sqrt{c}) + (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \le 3a + 3b + 3c$$

$$a + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + b + 2\sqrt{bc} + c \le 3a + 3b + 3c$$

$$2(\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}) \le 2(a+b+c)$$

$$\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc} \le a+b+c$$

При любых неотрицательных числах уравнение является верным. ? почему? нет достаточного обоснования