ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004415

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	Л Е Л Е Н К О В
	Имя	Н И К И Т А
	Отчество	Д М И Т Р И Е В И Ч
5.	Дата рождения	0 7 (число) 0 9 (месяц) 2 0 0 3 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Ростовская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Ростов-на-Дону
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ"Лицей №50 при ДГТУ"

Место для скобы

Шифр 04415

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
17	11.04.21	Корякина Е.Е.	[illegible]

№1

Даны 3 числа: $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$, $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$ и $x-\frac{1}{x}$,

Нужно найти x, при котором все три числа целые.

1) Пусть x – целое число, тогда $x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}$, тогда $НОД(x-1,x)=1$, $НОД(x,x+1)=1$ $\Rightarrow$ дробь несократимая $\Rightarrow$ число не целое

2) Пусть x – дробное, представим $x=\frac{a}{b}$, где $(a,b)\in Z$; $b\neq 0$, тогда пусть $НОД(a,b)=k$, представим $a=mk$, $b=nk$, где m и n – взаимно простые, тогда $x-\frac{1}{x}=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{mk}{nk}-\frac{nk}{mk}=\frac{m^2-n^2}{mn}$

Рассмотрим остатки при делении на 3

$m^2 \bmod 3=\{0,1\}$, пусть $m^2 \bmod 3=0$, тогда $m \vdots 3 \Rightarrow n \not\vdots 3 \Rightarrow$ $n^2 \bmod 3=1 \Rightarrow (m^2-n^2) \bmod 3=2$, а $mn \bmod 3=0 \Rightarrow$ числитель и знаменатель разных остатков при делении на 3, а значит дробь несократимая, аналогично, если $m^2 \bmod 3=1$ $\Rightarrow n^2 \bmod 3=0$

Рассмотрим два случая:

2.1) $m^2 \bmod 3=1$ $n \vdots 3$

$\frac{(m^2-n^2) \bmod 3}{(mn) \bmod 3}=\frac{1}{0}$ – разные остатки у числителя и знаменателя $\Rightarrow$ дробь несократимая

$\Rightarrow x-\frac{1}{x}$ – нецелое

2.2) $m^2 \bmod 3=1$ $n \not\vdots 3$

$\frac{(m^2-n^2) \bmod 3}{(mn) \bmod 3}=\frac{(1-1) \bmod 3}{(1\cdot 1) \bmod 3}=\frac{0}{1}$ или $\frac{0}{2}$ остатки числителя и знаменателя разные,

а значит дробь несократимая $\Rightarrow x-\frac{1}{x}$ – нецелое.

1	2	3	4	5	Σ
3	5	4	5	0	17

(См. следующую страницу)

Место для скобы

Шифр 004415

№1 (продолжение)

3) Пусть x - иррациональное, $x = \sqrt{t}$; $x - \frac{1}{x} = \sqrt{t} - \frac{\sqrt{t}}{t}$

$\Rightarrow x - \frac{1}{x} = \sqrt{t}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\left(\frac{t-1}{t}\right)$ - аналогично первому пункту

$\frac{t-1}{t}$ будет несократимой дробью, а т.к $\sqrt{t}$ - иррационален

$\Rightarrow x - \frac{1}{x}$ - нецелое.

4) Отдельно рассмотрим когда $x = \pm 1$ и $x - \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$

Тогда подставим в первое число

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} = \frac{1}{(\pm 1)} - \frac{1}{(\pm 1)^2+2021} = \pm 1 - \frac{1}{2022}$, что

не является целым числом.

Таким образом ни при каких x все три данных числа ~~не явл~~ одновременно не являются целыми. Ответ: такого числа x не существует.

(см. следующую страницу)

$\frac{1}{x}$

Место для скобы

Шифр 004415

№3

Дано $p(t)=t^n+5t^{n-1}+3$, $n>1$, n-целое число

Пусть $p(t)=g(t)\cdot h(t)$, то есть $g(t)$ и $h(t)$ многочлены, на которые нужно разложить $F(x)$

Пусть $g(t)=a_k t^k+a_{k-1}t^{k-1}+\ldots+a_1x+a_0$

$h(t)=\beta_k t^k+\beta_{k-1}t^{k-1}+\ldots+\beta_1 t+\beta_0$ | $a_k,\beta_k\in Z$; $g(t)$ и $h(t)$ приведенные многочлены

$\Longrightarrow a_0 b_0=3$, тогда либо $|a_0|=1, |\beta_0|=3$, либо $|a_0|=3, |\beta_0|=1$

тогда, не нарушая общности, пусть $|a_0|=3, |\beta_0|=1$

Пусть m — наименьшее натуральное число $|\, a_m \not\vdots\, 3$

(Такое m существует т.к $g(t)$ — приведенный)

$\Longrightarrow$ коэффициент Z_m при x^m у $F(x)$ будет равен:

$Z_m=a_0\beta_m+a_1\beta_{m-1}+\ldots+a_m\beta_0 \Rightarrow Z_m\equiv(a_0\beta_m)\bmod 3 \Rightarrow Z_m\not\equiv 0 \pmod 3$

Т.к $F(x)=t^n+5t^{n-1}+3$, то $m\geq n-1$

Но т.к сумма степеней старших членов $g(t)$ и $h(t)$ равна n, а степень каждого из них ≥ 1, то степень $h(t)=1$ $\Longrightarrow$

$h(t)$ имеет вид $x+\beta_0$, где $\beta_0=\pm 1$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $h(1)=0$, либо $h(-1)=0$ $\Rightarrow$ либо $F(1)=0$, либо $F(-1)=0$, но при $t=1$ или $t=-1$

$p(t)$ не обращается в ноль $\Longrightarrow$ противоречие!

А значит

Ответ: $p(t)$ нельзя представить в виде произведения многочленов положительной степени с целыми коэффициентами.

(см. следующую страницу)

Место для скобы

Шифр

№4

$$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x(x^2+\sqrt[3]{2020^4})} - \frac{\sqrt[3]{2020^4}\cdot x}{m+x^3}$$

$$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}x} + \frac{\sqrt[3]{2020^4}x}{m+x^3} + \frac{m}{x^3+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} \le \frac{3}{2}$$

Пусть $b=x^3$, $c=x\sqrt[3]{2020^4}$, тогда

$\frac{b}{m+c}+\frac{c}{m+b}+\frac{m}{b+c}\le\frac{3}{2}$. Пусть $b+c=y$, $m+c=z$, $m+b=d$

тогда $m=\frac{2m+b-b+c-c}{2}$? $= \frac{m+b+m+c-(b+c)}{2} = \frac{d+z-y}{2}$,

аналогично получим $b=\frac{y+d-z}{2}$?, $c=\frac{z+y-d}{2}$?, подставим

$\frac{3}{2} \ge \frac{d+z-y}{2y}+\frac{z+y-d}{2d}+\frac{y+d-z}{2z}$ Нерав-во.

$\frac{3}{2}\ge \frac{d}{2y}+\frac{z}{2y}-\frac{1}{2}+\frac{z}{2d}+\frac{y}{2d}-\frac{1}{2}+\frac{y}{2z}+\frac{d}{2z}-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}\ge\frac{d}{2y}+\frac{y}{2d}+\frac{z}{2d}+\frac{d}{2z}+\frac{y}{2z}+\frac{z}{2y}-\frac{3}{2}$

По неравенству Коши $\frac{d}{2y}+\frac{y}{2d}+\frac{z}{2d}+\frac{d}{2z}+\frac{y}{2z}+\frac{z}{2y}-\frac{3}{2} \ge 2\sqrt{\frac{dy}{2d2y}}+1+1-\frac{3}{2}$

$2\sqrt{\frac{dy}{2d2y}}+1+1-\frac{3}{2} = 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$, тогда выполняется равенство

при $\frac{d}{2y}=\frac{y}{2d}$; $\frac{z}{2d}=\frac{d}{2z}$; ... $\Rightarrow d^2=y^2$; $z^2=d^2 \Rightarrow d^2=z^2=y^2$

$x>0$ (по условию) $\Rightarrow m>0, b>0, c>0 \Rightarrow d>0, y>0, z>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow d=y=z \Rightarrow m+b=b+c=c+m \Rightarrow b=m$, $m=c$ $\Rightarrow m=b=c$

Тогда $x^3=x\sqrt[3]{2020^4} \,|: x>0$ $\quad x^2=\sqrt[3]{2020^4}$;

$x^6=2020^4$; $x^3=2020^2=4080400$

$m=x^3\Rightarrow m=4080400$

Ответ: $m=2020^2=4080400$

(см. следующий лист)

+

Место для скобы

№2.

Шифр

$\sin(2x)+\sin^5(2x)+2020\sin^9(2x)=\cos(4x)+\cos^5(4x)+2020\cos^9(4x)$

Заметим что $\sin 2x$ и $\cos 4x$ не могут одновременно равняться 0

Пусть $\sin(2x)=t$, $\cos(4x)=q$, Тогда $t+t^5+2020t^9=q+q^5+2020q^9$

$(t-q)+(t^5-q^5)+2020(t^9-q^9)=0$

$(t-q)+(t-q)(t^4+t^3q+t^2q^2+tq^3+q^4)+(t-q)2020(t^8+t^7q+t^6q^2+t^5q^3+t^4q^4+t^3q^5+t^2q^6+tq^7+q^8)=0$

$tq=\sin(2x)(1-2\sin^2(2x))=t(1-2t^2)=t-2t^3$

1) По неравенству Коши

$t^4+t^3q+\frac{1}{2}t^2q^2+\frac{1}{2}t^2q^2+tq^3+q^4\geq 2\sqrt{t^4\cdot\frac{1}{2}t^2q^2}+2\sqrt{q^4\cdot\frac{1}{2}t^2q^2}+t^3q+tq^3$

$2\sqrt{t^4\frac{1}{2}t^2q^2}+2\sqrt{t^4\cdot\frac{1}{2}t^2q^2}+t^3q+tq^3=\sqrt{2}|t^3q|+\sqrt{2}|tq^3|+tq^3+qt^3$ при $q<0$ или $t<0$

$\sqrt{2}|tq^3|+\sqrt{2}|t^3q|-|tq^3|-|t^3q|=(\sqrt{2}-1)|tq^3|+(\sqrt{2}-1)|t^3q|$, что >0 т.к $\sqrt{2}-1>0$.

$\Rightarrow t^4+t^3q+t^2q^2+tq^3+q^4>0$

2) По неравенству Коши

$t^8+t^7q+t^6q^2+t^5q^3+\frac{1}{2}t^4q^4+\frac{1}{2}t^4q^4+tq^5+t^2q^6+tq^7+q^8\geq 2\sqrt{t^8\cdot\frac{1}{2}t^4q^4}+2\sqrt{q^8\cdot\frac{1}{2}t^4q^4}+$

$+2\sqrt{t^7q\cdot t^5q^3}+2\sqrt{tq^7\cdot t^3q^5}+t^6q^2+t^2q^6$

$2\sqrt{t^8\cdot\frac{1}{2}t^4q^4}+2\sqrt{q^8\frac{1}{2}t^4q^4}+2\sqrt{t^7q\cdot t^5q^3}+2\sqrt{tq^7\cdot t^3q^5}+t^6q^2+t^2q^6=\sqrt{2}t^6q^2+\sqrt{2}t^2q^6+2t^6q^2+2t^2q^6+t^6q^2+t^6q^2$

что при $q<0$ или $t<0$ ~~будет~~ $>0 \Rightarrow t^8+t^7q+t^6q^2+t^5q^3+t^4q^4+t^3q^5+t^2q^6+tq^7+q^8>0$.

Вернемся к исходному выражению

$(t-q)+(t-q)(t^4+t^3q+t^2q^2+tq^3+q^4)+2020(t-q)(t^8+t^7q+t^6q^2+t^5q^3+t^4q^4+t^3q^5+t^2q^6+tq^7+q^8)=$

$(t-q)\left(\underbrace{1}_{>0}+\underbrace{t^4+t^3q+t^2q^2+tq^3+q^4}_{>0}+2020(\underbrace{t^8+t^7q+t^6q^2+t^5q^3+t^4q^4+t^3q^5+t^2q^6+tq^7+q^8}_{>0})\right)=0$

т.к члены правой скобки >0, то и вся скобка >0 и не $=0$, а значит

$t-q=0\Rightarrow t=q\Rightarrow\sin(2x)=\cos(4x)=\sin(2x)=1-2\sin^2(2x)$

$2\sin^2(2x)+\sin(2x)-1=0$ $\left[\begin{array}{l}\sin(2x)=-1\\ \sin(2x)=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}2x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k;k\in\mathbb{Z}\\ 2x=\frac{\pi}{6}+2\pi n;n\in\mathbb{Z}\\ 2x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m;m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{4}+\pi k;k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi}{12}+\pi n;n\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{5\pi}{12}+\pi m;m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{4}+\pi k,k\in\mathbb{Z};\\ x=\frac{\pi}{12}+\pi n;n\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{5\pi}{12}+\pi m;m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

X