07185

Шифр

ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

ет	Математика
нт	1
	10 Б
ия	КРАВЧЕНКО
	ТИМУР
тво	СЕРГЕЕВИЧ
ождения	18 (Число) 08 (Месяц) 2006 (Год)
а	РОССИЯ
я *(пр: Томская обл., инградская область)*	Кемеровская область
ниципального образования *и, деревня, село, город)*	город
енный пункт *(пр: Томск, ово, Псков)*	Кемерово
е наименование ватального учреждения, ром Вы обучаетесь в е время	МБНОУ ГКЛ

асие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail зультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Кравченко

Шифр 07185

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
29		Емельянова	Ему

1	2	3	4	5	Σ
4	4	7	7	7	29

№ 4

$x^2+px-\frac{1}{2p^2}=0$

По т Виета

$\begin{cases} x_1x_2=-\frac{1}{2p^2} \\ x_1+x_2=-p \end{cases}$

$(x_1+x_2)^2=p^2$

$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=p^2$

$x_1^2+x_2^2=p^2-2\left(-\frac{1}{2p^2}\right)$

$x_1^2+x_2^2=p^2+\frac{1}{p^2}$

$(x_1^2+x_2^2)^2=\left(p^2+\frac{1}{p^2}\right)^2$

$x_1^4+x_2^4+2(x_1x_2)^2=p^4+2+\frac{1}{p^4}$

$x_1^4+x_2^4=p^4+2+\frac{1}{p^4}-2\left(\frac{1}{4p^4}\right)$

$x_1^4+x_2^4=p^4+2+\frac{1}{p^4}-\frac{1}{2p^4}$

$x_1^4+x_2^4=p^4+2+\frac{1}{2p^4}$

Докажем след утверждение:

$p^4+\frac{1}{2p^4}\geq\sqrt{2}$

$p^4+\frac{1}{2p^4}-\sqrt{2}=\left(p^2-\frac{1}{\sqrt{2}p^2}\right)^2=p^4-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2p^4}=p^4-\sqrt{2}+\frac{1}{2p^4}$

Т.к $\left(p^2-\frac{1}{\sqrt{2}p^2}\right)^2\geq 0$, то исходное утверждение верно

$$x_1^4 + x_2^4 = 2 + \left(p^4 + \frac{1}{2p^4}\right) \geq 2 + \sqrt{2}$$

$$\geq \sqrt{2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$$

ч.т.д.

№3

$$\frac{a+b-c}{2c} + \frac{b+c-a}{2a} + \frac{a+c-b}{2b} \geq \frac{3}{2} \quad / \cdot 2$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} - 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} - 1 \geq 3$$

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 6$$

$$\frac{\frac{a}{c} + \frac{c}{a}}{2} \geq \sqrt{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}}$$ По неравенству о средних

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$$

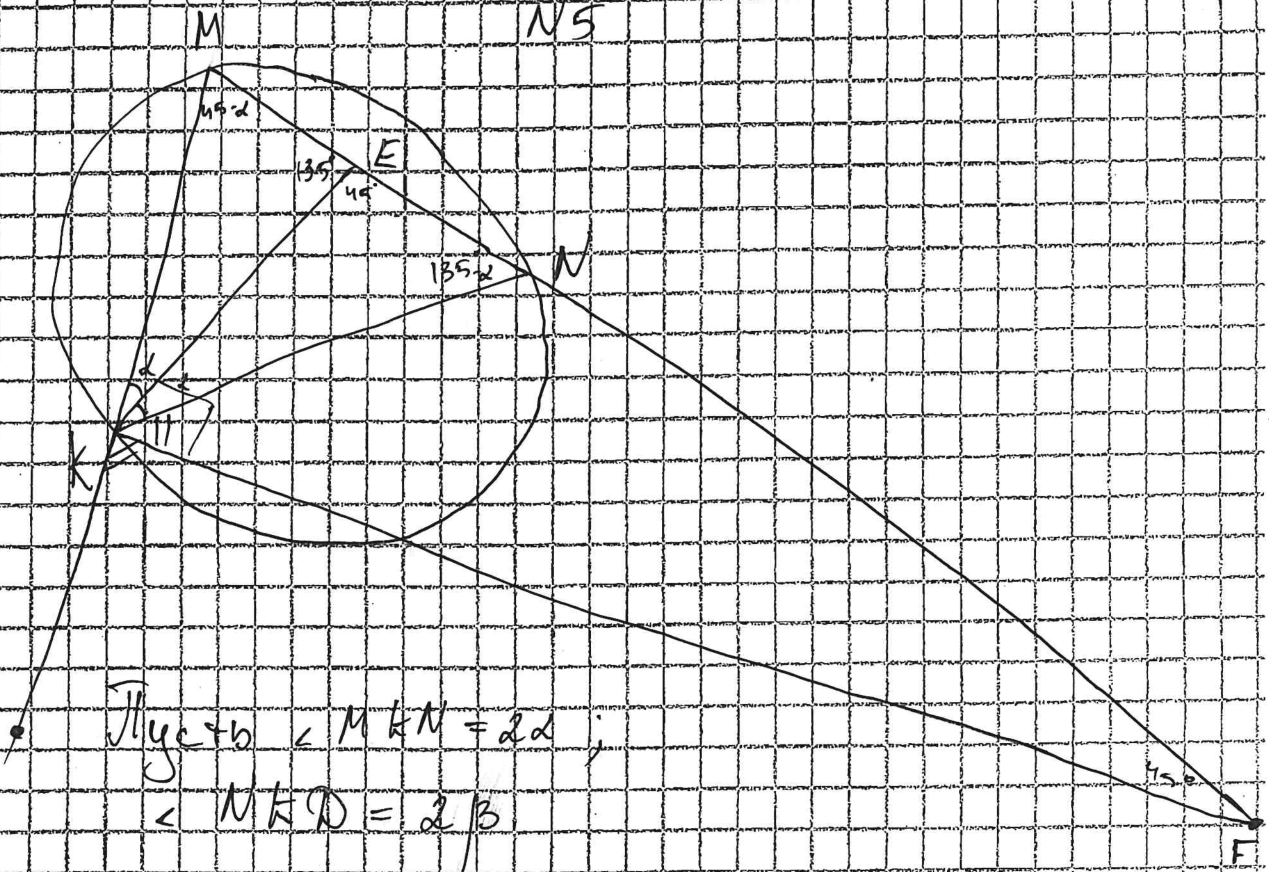
Аналогично для других скобок

$$\underbrace{\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)}_{\geq 2} + \underbrace{\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)}_{\geq 2} + \underbrace{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)}_{\geq 2} \geq 6$$

$$2 + 2 + 2 \geq 6$$

ч.т.д.

№5



Пусть $\angle MKN = 2\alpha$;

$\angle NKD = 2\beta$

$2\beta + 2\alpha = 180^\circ$

$\alpha + \beta = 90^\circ$

$\angle MKE = \angle EKN = \alpha$ (KE - бис)

$\angle NKF = \angle FKD = \beta$ (KF - бис)

$\angle EKN + \angle NKF = \alpha + \beta = 90^\circ$

Т.к. $KE = KF$ $\triangle EKF$ - р/б

$\angle KEF = \angle KFE = 45^\circ$

$\angle MEK = 180^\circ - \angle KEN = 135^\circ$

$\angle ENK = 135^\circ - \alpha$

$\angle KME = 45^\circ - \alpha$

Запишем теорему синусов для $\triangle MNK$

скобы

Шифр 7185

$$\frac{MK}{\sin MNK} = \frac{NK}{\sin KMN} = 2R$$

$$\begin{cases} \frac{MK}{\sin(135-\alpha)} = 2R \\ \frac{NK}{\sin(45-\alpha)} = 2R \end{cases} \qquad \sin(135^\circ-\alpha) = \cos(45^\circ-\alpha)$$

$$\begin{cases} MK = 2R\cdot\cos(45^\circ-\alpha) \\ NK = 2R\cdot\sin(45^\circ-\alpha) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} MK^2 = 4R^2\cdot\cos^2(45-\alpha) \\ NK^2 = 4R^2\cdot\sin^2(45-\alpha) \end{cases}$$

$$MK^2+NK^2 = 4R^2\underbrace{(\cos^2(45-\alpha)+\sin^2(45-\alpha))}_{=1}$$

$$MK^2+NK^2 = 4R^2$$

N1

$$y^2(y-x+2)-y(x+4)+5x+7=0$$

$$y^3-y^2x+2y^2-yx-4y+5x+7=0$$

$$(y^3+2y^2+y)-(y^2x+yx)+5x-5y+7=0$$

$$y(y+1)(y+1)-yx(y+1)+5x-5y+7=0$$

$$(y+1)(y^2+y-yx)+5x-5y+7=0$$

$$(y+1)y(y-x+1)-5(y-x+1)+12=0$$

Место для скобы

Шифр 7185

$$(y - x + 1)(y^2 + y - 5) = -12$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y - x + 1 = 1 \\ y^2 + y - 5 = -12 \end{cases} \quad y^2 + y + 7 = 0 \quad D < 0 \\ \begin{cases} y - x + 1 = -1 \\ y^2 + y - 5 = 12 \end{cases} \quad y^2 + y - 17 = 0 \quad D = 69 \quad y \notin \mathbb{Z} \\ \begin{cases} y - x + 1 = 2 \\ y^2 + y - 5 = -6 \end{cases} \quad y^2 + y + 1 = 0 \quad D < 0 \\ \begin{cases} y - x + 1 = 6 \\ y^2 + y - 5 = -2 \end{cases} \quad y^2 + y - 3 = 0 \quad D = 13 \quad y \notin \mathbb{Z} \\ \begin{cases} y - x + 1 = 3 \\ y^2 + y - 5 = -4 \end{cases} \quad y^2 + y - 1 = 0 \quad D = 5\ ; y \notin \mathbb{Z} \\ \begin{cases} y - x + 1 = 4 \\ y^2 + y - 5 = -3 \end{cases} \end{array}\right.$$

корней нет $\varnothing$ (1-я система)

$\varnothing$ (2-я система)

корней нет $\varnothing$ (3-я система)

$\varnothing$ (4-я система)

$\varnothing$ (5-я система)

$$\begin{cases} y - x + 1 = 4 \\ y^2 + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Из второго ур-я получаем

$$\left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -2 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} y - x + 1 = 4 \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-x+1=4\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}-2-x+1=4\\ y=-2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-2\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-5\\ y=-2\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ $(-2;1)$, $(-5;-2)$

№2

$$\begin{cases}\cos 3x = A\cdot\sin 2x\\ \sin 3x = B\cdot\cos 4x\end{cases}$$

$4\cos^3 x - 3\cos x = 2A\sin x\cos x$

$4\cos^3 x - 2A\sin x\cos x - 3\cos x = 0$

$\cos x\,(4\cos^2 x - 2A\sin x - 3) = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 4(1-\sin^2 x) - 2A\cdot\sin x - 3 = 0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ 4\sin^2 x + 2A\sin x - 1 = 0\end{array}\right.$$

~~При $x = \frac{\pi}{2}+\pi k$~~

~~$4x = 2\pi + 4\pi k$~~

~~$\cos 4x = 0$~~ $\Rightarrow$ ~~$\sin 3x = 0$~~

место для скобы

Шифр 7185

При $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ — это частный случай

$3x = \frac{3\pi}{2} + 3\pi k,\ k \in Z$

$\sin 3x = -1$

$4\sin^2 x + 2\cancel{A}\sin x - 1 = 0$

$\sin 3x = B\cos 4x$

$3\sin x - 4\sin^3 x = B(1 - 8\sin^2 x + 8\sin^4 x)$

$3\sin x - 4\sin^3 x = B - 8B\sin^2 x + 8B\sin^4 x$

$8B\sin^4 x + 4\sin^3 x - 8B\sin^2 x - 3\sin x + B = 0$

$8B\sin^4 x + 4\sin^3 x - 8B\sin^2 x - 4\sin x = B - \sin x$

$4\sin^3 x(B\sin x + 1) - 4\sin x(B\sin x + 1) = B - \sin x$

$4\sin x(\sin^2 x - 1)(B\sin x + 1) = B - \sin x$

$\sin x(4(\sin^2 x - 1)(\sin^2 x + 1) + 1) = B$

$$\begin{cases} \sin x(4\sin^2 x + 3) = B \\ \dfrac{(2\sin x - 1)(2\sin x + 1)}{-2\sin x} = A \end{cases}$$

Из данной системы можно понять, что $\sin x$ — рац число

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ (рац, рац)

$\sin 3x$ — рациональное