Шифр: 07062

·КРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

·т	МАТЕМАТИКА
·т	
	9
·ия	КОЗЛОВ
	ЕВГЕНИЙ
·ю	АЛЕКСЕЕВИЧ
·ждения	11 (Число) 05 (Месяц) 2007 (Год)
	РОССИЯ
(пр: Томская обл., ·градская область)	ТОМСКАЯ ОБЛ.
·ципального образования *(деревня, село, город)*	ГОРОД
·нный пункт *(пр: Томск, ·во, Псков)*	ТОМСК
наименование ·ательного учреждения, ·ом Вы обучаетесь в ·время	МАОУ СОШ №4 им. И.С. ЧЕРНЫХ

·ие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail ·льтатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ЕКозлов

Шифр 07062

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
21	29.03.23	Хмылёва Т.Е	[illegible]

1	2	3	4	5
–	–	7	1	7

№4

x_1, x_2 – корни многочлена $x^2 + p_1x + 1$

x_3, x_4 – корни многочлена $x^2 + p_2x + 1$

Доказать, что $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) = p_2^2 - p_1^2$

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) = p_2^2 - p_1^2$$

$$(\underbrace{x_1x_2}_{1 \text{ (по теореме Виета)}} - x_3x_2 - x_3x_1 + x_3^2)(\underbrace{x_1x_2}_{1 \text{ (по теореме Виета)}} + x_4x_1 + x_4x_2 + x_4^2) =$$

$$= (1 - x_3(\underbrace{x_2 + x_1}_{-p_1 \text{ (т. Виета)}}) + x_3^2)(1 + x_4(\underbrace{x_2 + x_1}_{-p_1 \text{ (т. Виета)}}) + x_4^2) =$$

$$= (1 + x_3p_1 + x_3^2)(1 + (-x_4p_1) + x_4^2) =$$

$$= (1 + x_3p_1 + x_3^2)(1 - x_4p_1 + x_4^2) = 1 - x_4p_1 + x_4^2 + x_3p_1 -$$

$$- \underbrace{x_3x_4p_1^2}_{p_1^2} + \underbrace{x_3x_4^2p_1}_{x_4p_1} + x_3^2 - \underbrace{x_3^2x_4p_1}_{x_3p_1} + \underbrace{x_3^2x_4^2}_{1} =$$

$$= 1 - \cancel{x_4p_1} + x_4^2 + \cancel{x_3p_1} - p_1^2 + \cancel{x_4p_1} + x_3^2 - \cancel{x_3p_1} + 1 =$$

$$= x_4^2 + \underbrace{2}_{2\cdot(x_4x_3)} + x_3^2 - p_1^2 = x_4^2 + 2x_4x_3 + x_3^2 - p_1^2 =$$

$$= (\underbrace{x_4 + x_3}_{-p_2})^2 - p_1^2 = p_2^2 - p_1^2$$

ч.т.д.

Шифр 07062

№3

Доказать, что для любых неотрицательных чисел a, b, c выполняется неравенство

$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \leq 3(a+b+c)$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \leq 3(a+b+c)$

$a+b+c+\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc} \leq 3(a+b+c)$

$a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc} \leq 3(a+b+c) \quad \Big| -(a+b+c)$

$2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc} \leq 2a+2b+2c$

$2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc} \leq (a+b)+(a+c)+(c+b)$

Докажем, что $2\sqrt{ab} \leq a+b$.

Поскольку числа по обе стороны знака неравенства неотрицательны, возведём обе части в квадрат.

$4ab \leq (a+b)^2 \quad \Big| -4ab$

$(a+b)^2 - 4ab \geq 0$

$a^2+2ab+b^2-4ab \geq 0$

$a^2-2ab+b^2 \geq 0$

$(a-b)^2 \geq 0$ — верно

$\Downarrow$

$2\sqrt{ab} \leq a+b$ — верно

Аналогично $2\sqrt{ac} \leq a+c$, $2\sqrt{bc} \leq b+c$.

скобы .

Шифр 07062

Имеем:

$2\sqrt{ab} \le a+b$

$2\sqrt{bc} \le b+c$ Сложим эти неравенства

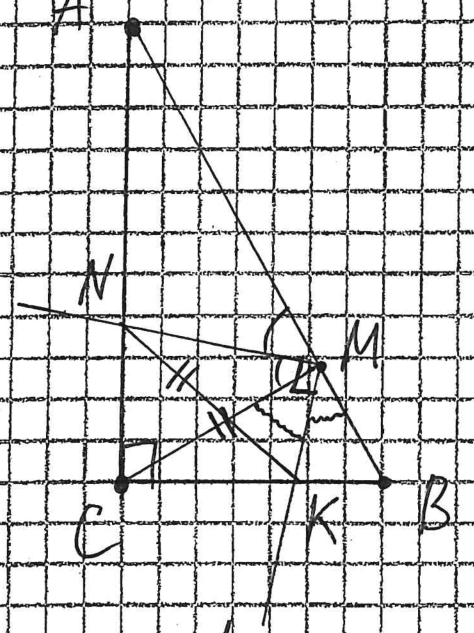
$2\sqrt{ac} \le a+c$

$$2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} \le (a+b)+(a+c)+(c+b)$$

Верность получившегося неравенства доказана, следовательно, $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \le 3(a+b+c)$ - верно для любых неотрицательных a, b, c.

ч.т.д.

№5



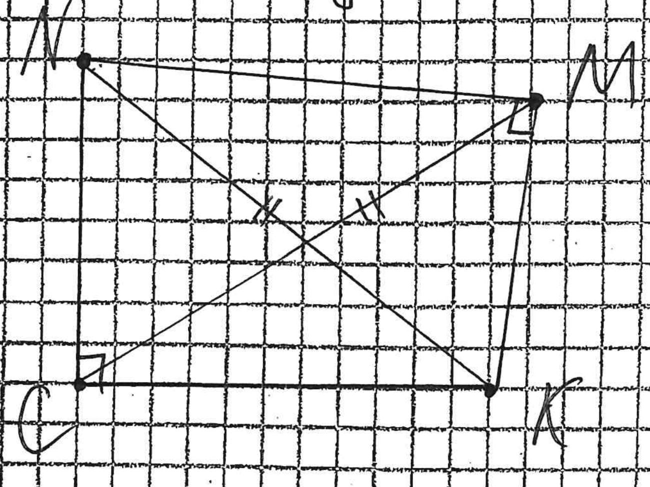
$CM = NK$

$\angle NMC = \angle AMC \cdot \frac{1}{2}$

$\angle KMC = \angle BMC \cdot \frac{1}{2}$

$\angle NMC + \angle KMC = \angle NMK = \frac{1}{2}(\angle AMC + \angle BMC) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$

Рассмотрим четырёхугольник CNMK.



Окружности, описанные вокруг треугольников (прямоугольных) NCK и NMK будут иметь центры на середине NK (гипотенуза обоих Δ).

Также радиусы этих окружностей будут равны ($R_1 = R_2 = \frac{1}{2}NK$). Следовательно, эти окружности будут совпадать (т.к. $R_1 = R_2$ и центры совпадают). Следовательно, четырёхугольник $NCKM$ — вписанный (также это следует из того, что $\angle C + \angle M = \angle N + \angle K = 180^\circ$, второй вариант доказательства). NK — диаметр описанной вокруг четырехугольника окружности (т.к. центр окружности лежит на NK). Но $MC = NK$, следовательно, MC тоже является диаметром окружности. Следовательно, $\angle N = \angle K = 90^\circ$ (вписанные углы, опирающиеся на диаметр). Следовательно, $NCKM$ — прямоугольник.

Рассмотрим $\triangle AMC$:

1. MN — биссектриса (по условию)
2. MN — высота (т.к. $\angle MNC = 90^\circ$, что доказано выше)

$\Downarrow$

$\triangle AMC$ — равнобедренный (по признаку), $AM = MC$

Аналогично можно доказать, что $MB = MC$ (рассматривая $\triangle CMB$). Итак, $AM = MC = MB$.

ч.т.д.