КРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

08161

Шифр

т	математика
т	1
	11
ия	Ковалев
	Евгений
во	Александрович
ждения	06 (Число) 03 (Месяц) 2006 (Год)
	Россия
(пр: Томская обл., ıградская область)	Ростовская область
ıципального образования (деревня, село, город)	город
ıный пункт (пр: Томск, зо, Псков)	Ростов-на-Дону
наименование ательного учреждения, ом Вы обучаетесь в время	МБОУ „Лицей 50"

ıие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail ıльтатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ____________________

Место для скобы

Шифр 08161

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
21	6.04	Корякова Е.Е.	[illegible]

№1

$2x^2+2x^2z^2+z^2+7y^2-42y+33=0$

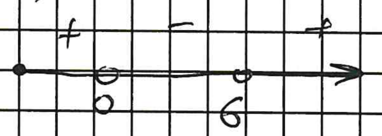
$2x^2(1+z^2)+1+z^2+7y^2-42y+32=0$

$(2x^2+1)(1+z^2)+7y(y-6)+32=0$

Заметим, что $2x^2+1>0$, т.к. $x^2\geqslant 0$; $1+z^2>0$, т.к. $z^2\geqslant 0$; $32>0$.

Следовательно, т.к. 2 из 3 слагаемых больше нуля, то $7y(y-6)$ должно быть меньше нуля.

$7y(y-6)<0$



1	2	3	4	5	Σ
7	0	7	6	1	21

$y\in(0;6)$, $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y=\{1,2,3,4,5\}$.

1) $y=1$

$(2x^2+1)(z^2+1)=3$.

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2+1=1\\ z^2+1=3\end{cases}\\ \begin{cases}2x^2+1=3\\ z^2+1=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ z=\pm\sqrt{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\pm1\\ z=0\end{cases}\end{array}\right.$ — не уд. усл. задачи

2) $y=2$

$(2x^2+1)(z^2+1)=24$.

Заметим, что значение $2x^2+1$ всегда нечётно, следовательно,

Место для скобы

Шифр 08161

Множитель, равный $2x^2+1$ должен быть нечетным, т.к. в противном случае x не будет целым.

$24 = 1\cdot 24,\ \cancel{2\cdot 12},\ 3\cdot 8,\ \cancel{4\cdot 6},\ \cancel{6\cdot 4},\ \cancel{8\cdot 3},\ \cancel{12\cdot 2},\ \cancel{24\cdot 1}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(2x^2+1) = 1\\ z^2+1=24\end{cases}\\ \begin{cases}2x^2+1=3\\ z^2+1=8\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ z=\pm\sqrt{23}\end{cases} \varnothing\\ \begin{cases}x=\pm 1\\ z=\pm\sqrt{7}\end{cases} \varnothing\end{array}\right.$$

Решений нет.

3) $y=3$.

$(2x^2+1)(z^2+1)=31$ (31 – простое)

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2+1=1\\ z^2+1=31\end{cases}\\ \begin{cases}2x^2+1=31\\ z^2+1=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ z=\pm\sqrt{30}\end{cases} \varnothing\\ \begin{cases}x=\sqrt{15}\\ z=0\end{cases} \varnothing\end{array}\right.$$

Решений нет.

4) $y=4$

$(2x^2+1)(z^2+1)=56-32=24$

$(2x^2+1)(z^2+1)=24$.

Данное уравнение было рассмотрено в пункте 2.

Решений нет.

5) $y=5$

$(2x^2+1)(z^2+1)=3$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2+1=3\\ z^2+1=1\end{cases}\\ \begin{cases}2x^2+1=1\\ z^2+1=3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\pm 1\\ z=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\ z=\pm\sqrt{2}\end{cases} \varnothing\end{array}\right.$$

Место для скобы

Шифр 08161

Все целые значения y были рассмотрены. Других возможных целых значений не существует, учитывая, что $y \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $(x=1,\ y=1,\ z=0)$, $(x=-1,\ y=1,\ z=0)$,
$(x=1,\ y=5,\ z=0)$,
$(x=-1,\ y=5,\ z=0)$.

№4

ax^3-ax^2+bx+b

x_1, x_2, x_3 - корни.

Если x_1, x_2, x_3 - корни, то многочлен вида $ax^3+bx^2+cx+d=$
$=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=a(x^2-xx_2-xx_1+x_1x_2)(x-x_3)=$
$=a(x^3-x_3x^2-x_2x^2+xx_2x_3-x_1x^2+xx_1x_3+xx_1x_2-x_1x_2x_3)=$
$=ax^3-ax^2(x_1+x_2+x_3)+ax(x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3)-ax_1x_2x_3$.

Из условия коэффициент при $x^2=-a$, при $x=b$, свободный член также равен b.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_2x_3+x_1x_2+x_1x_3=\frac{b}{a} \\ x_1x_2x_3=-\frac{b}{a} \end{cases}$$

$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-1$

Место для скобы,

Шифр 08161

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{\cancel{x_2 x_3}\; x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3)}\right)=-1$$

$$1\cdot\left(\frac{\frac{b}{a}}{\frac{-b}{a}}\right)=1\cdot\left(\frac{b}{a}\cdot(-1)\cdot\frac{a}{b}\right)=1(-1)=-1.$$

В данном действии я подставил значения, найденные $x_1x_2x_3$ из системы, в исходное уравнение, предварительно ~~прив~~ приведя к общему знаменателю.

Доказано.

№ 3

$$\frac{2a}{3(b+c)}+\frac{2b}{(3+(a+c)}+\frac{2c}{3(a+b)}\geqslant 1.$$

$$2a\cdot3\cdot3(a+c)(a+b)+2\cdot3\cdot3b(b+c)(a+b)+2\cdot3\cdot3c(c+b)(c+a)-$$
$$-3\cdot3\cdot3(b+c)(a+c)(a+b)\vee0$$

$$\cancel{18}^{2}a(a^2+ab+ac+bc)+\cancel{18}^{2}b(b^2+ab+bc+ac)+\cancel{18}^{2}c(c^2+ac+bc+ab)-\cancel{27}^{3}(a^2b+$$
$$+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+2abc)\vee0 \quad |:9$$

$$2a^3+2a^2b+2a^2c+\cancel{2abc}+2b^3+2ab^2+2b^2c+\cancel{2abc}+2c^3+2ac^2+2bc^2+\cancel{2abc}-$$
$$-3a^2b-3ab^2-3a^2c-3ac^2-3b^2c-3bc^2-\cancel{6abc}\vee0$$

$$2a^3-a^2b-a^2c+2b^3-ab^2-b^2c+2c^3-ac^2-bc^2\vee0$$

$$\underbrace{a^3-a^2b-ab^2+b^3}_{x}+\underbrace{a^3-a^2c-ac^2+c^3}_{y}+\underbrace{b^3-b^2c-bc^2+c^3}_{z}\vee0$$

Рассмотрим знак каждого из слагаемых x, y, z отдельно друг от друга.

Место для скобы

Шифр

1) x.

$a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 \vee 0$

$a^3 + b^3 \vee a^2b + ab^2$

$\cancel{(a+b)}(a^2 - ab + b^2) \vee ab\cancel{(a+b)} \quad \Big| : (a+b) \neq 0$, т.к. $a>0$, $b>0$

$a^2 - 2ab + b^2 \vee 0$

$(a-b)^2 \geqslant 0 \rightarrow x \geqslant 0$.

2) y

$a^3 - a^2c - ac^2 + c^3 \vee 0$

$a^3 + c^3 \vee a^2c + ac^2$

$\cancel{(a+c)}(a^2 - ac + c^2) \vee ac\cancel{(a+c)} \quad \Big| : (a+c) \neq 0$, т.к. $a>0$, $c>0$

$a^2 - 2ac + c^2 \vee 0$

$(a-c)^2 \geqslant 0 \rightarrow y \geqslant 0$

3) z!

$b^3 - b^2c - bc^2 + c^3 \vee 0$

$b^3 + c^3 \vee b^2c + bc^2$

$\cancel{(b+c)}(b^2 - bc + c^2) \vee bc\cancel{(b+c)} \quad \Big| : (b+c) \neq 0$, т.к. $b>0$, $c>0$

$b^2 - 2bc + c^2 \vee 0$

$(b-c)^2 \geqslant 0 \rightarrow z \geqslant 0$

$x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0 \Rightarrow x + y + z \geqslant 0. \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3}_{x} + \underbrace{a^3 - a^2c - ac^2 + c^3}_{y} + \underbrace{b^3 - b^2c - bc^2 + c^3}_{z} \geqslant 0$.

Следовательно, данное неравенство является корректным для любых $a, b, c > 0$. Доказано.

Место для скобы

Шифр

№2

$$2^{\lg(x^2-2023)} - \lg 2^{x^2-2022} = 0$$

$$2^{\lg(x^2-2023)} - (x^2-2022)\lg 2 = 0$$

$$2^{\lg(x^2-2023)} - x^2\lg 2 + 2022\lg 2 = 0.$$

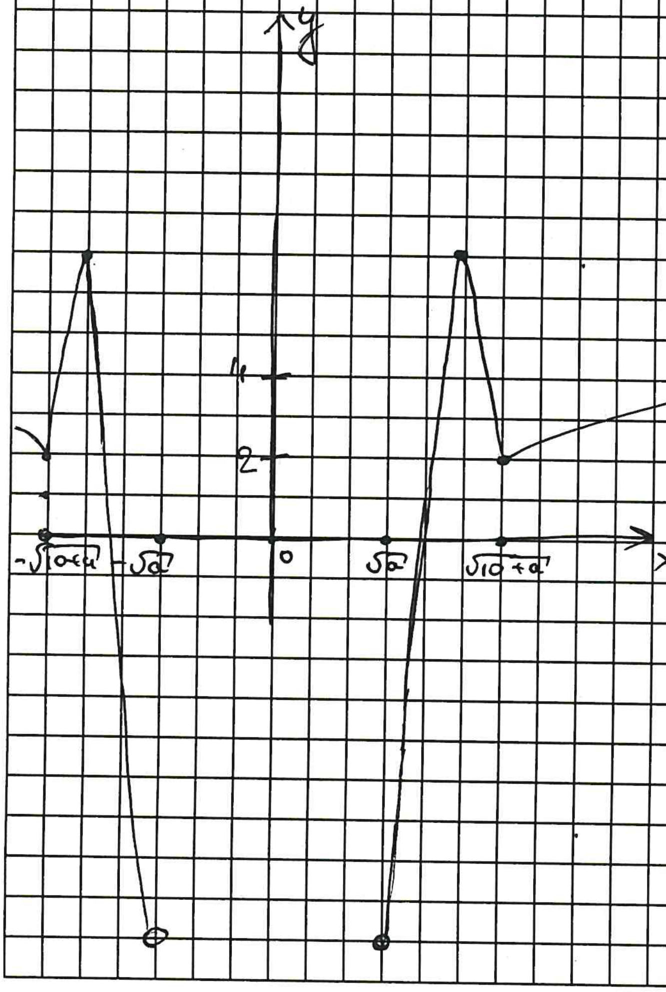
$$2^{\lg(x^2-2023)} + 2022\lg 2 = x^2\lg 2$$

Пусть $f(x) = x^2\lg 2$; $\varphi(x) = 2^{\lg(x^2-2023)} + 2022\lg 2$.

Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ — четные, т.к. x в четной степени $\Rightarrow$ график каждой из этих функций симметричен относительно прямой Oy.

Исследуем график функции $2^{\lg(x^2-a)} = 2^{\log_{10}(x^2-a)}$

$\varphi(x)$ показ. ф-я



1) Если x^2 превосходит a на очень малую величину (меньше 1), то $\varphi(x) < 0$

2) В точках $\pm\sqrt{10+a}$ $\varphi(x) = 2$

3) ~~мак~~ в точках $\in(\sqrt{a}; \sqrt{a+10})$ и $x \in (-\sqrt{10+a}; -\sqrt{a})$ есть точки максимума функции.

График функций $f(x) = x^2\lg 2$ есть парабола, прижатая к оси Ox в $\log_{10}2$ раз.

Пусть d — бесконечно малая положительная величина.

Место для скобы

Шифр

Тогда если $f(x) < \varphi(x)$, где $x = \sqrt{2023+d}$, то исходное уравнение имеет 2 решение, т.к. графики функций симметричны относительно Oy, и если x_0 – ~~решение~~ корень, то $-x_0$ – тоже корень.

Рассмотрим в пределе:

~~$\varphi(x)$~~

$$\lim_{d \to 0^+} \varphi(\sqrt{2023+d}) - f(\sqrt{2023+d}) = 2^{\lg(\sqrt{2023+d}^2 - 2023)} - \sqrt{2023+d}^2 \log_{10} 2 =$$

$$= 2^{\log_{10} d} - 2023 \log_{10} 2 - d \log_2 \Rightarrow \lim_{d \to 0^+} \varphi(\sqrt{2023+d}) - f(\sqrt{2023+d}) =$$

$$\downarrow 0 \qquad \downarrow 0$$

$$= -2023 \log_{10} 2.$$

Следовательно, $f(x)$ в минимальной точке, удовлетворяющей $D(\varphi)$ больше, следовательно при меньших значениях $f(x)$ располагается на множестве точек, не входящих в $\varphi(x)$. А поскольку ~~в~~ $f(x)$ возрастает быстрее, то и на области определения, где $x > 2023+d$ общих точек графики не будут иметь. (Следовательно, в силу симметрии, при $x<0$ решений также не будет).

Ответ: 0 решений.

№5

Дано:

$\triangle MNK$ – правильный

$(O;R)$ – описанная окр

$F \in (O;R)$

Доказать:

$MF^4 + NF^4 + KF^4 = const$

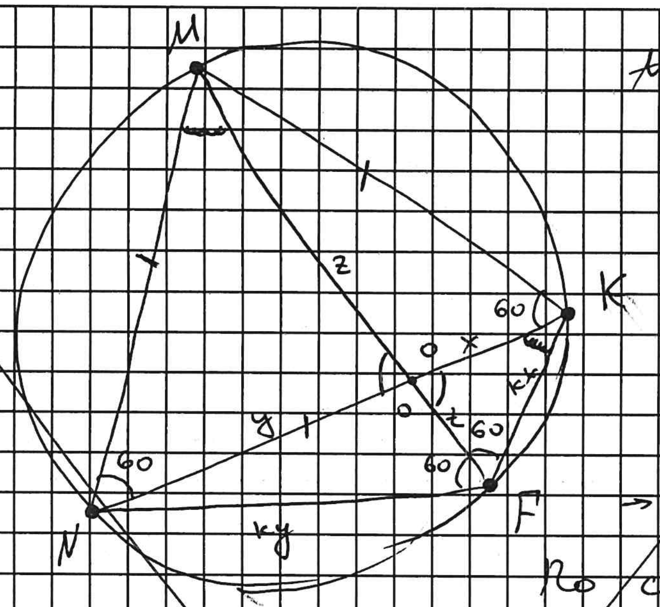
Решение:

Решение и ~~пу~~ ~~пись~~

и рисунок на другой стороне,

т.к. тут слишком мало места.

Решение:



~~MNK~~ $(MF \cap NK = O)$

$MKFN$ – вписанный четырехугольник.

$\angle MNK = \angle MFK = \frac{1}{2}\overset{\smile}{MK} = 60^\circ$

$\angle NKM = \angle MFN = \frac{1}{2}\overset{\smile}{MN} = 60^\circ$

$\angle KFM = \angle MFN = 60^\circ \rightarrow$

$\rightarrow FM$ – биссектриса в $\triangle NKF$.

По свойству биссектрисы:

$\frac{KO}{NO} = \frac{KF}{NF}$. Пусть $KO = x$; $ON = y$,

тогда $FK = kx$, $FN = ky$.

Пусть $\angle KOF = \alpha$; тогда $\angle MON = \alpha$ (вертикальные). $(KO = x,$ $OM = z,$ $ON = y,$ $OF = t)$

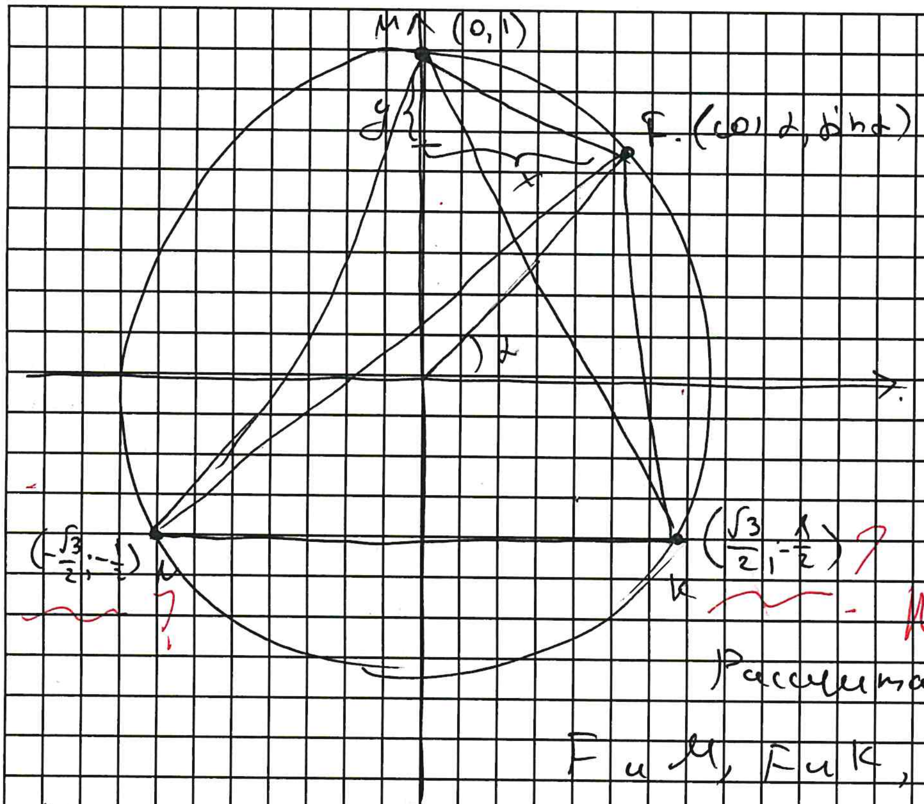
$S_{\triangle}KOF = \frac{1}{2}xt\sin\alpha$

$S_{\triangle}NOM = \frac{1}{2}y\cdot z\sin\alpha)$

$\frac{S_{\triangle}KOF}{S_{\triangle}NOM} = \frac{xt}{yz}$

Место для скобы

Шифр



Рассмотрим единичную окружность с центром в начале координат.

Тогда $M(0;1)$, $K(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$; $N(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$

пояснение !!

Рассчитаем расстояния между F и M, F и K, F N.

1) FN.

$FM=\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(1-\sin\alpha)^2+(0-\cos\alpha)^2}$.

2) FN:

$FN=\sqrt{\left(\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\sin\alpha+\frac{1}{2}\right)^2}$

3) FK

$FK=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\alpha\right)^2+\left(\sin\alpha+\frac{1}{2}\right)^2}$.

зависит от α

$FM^4+FN^4+FK^4=\left((1-\sin\alpha)^2+(0-\cos\alpha)^2\right)^2+\left(\left(\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\sin\alpha+\frac{1}{2}\right)^2\right)^2+$ $+\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\alpha\right)^2+\left(\sin\alpha+\frac{1}{2}\right)^2\right)^2$. А это ~~его~~ есть величина постоянная. При этом не зависит от F и изначальных координат вершин △MNK. Данная величина является постоянной, т.к. при раскрытии скобок переменные у сокращение, оставив только числовые значения, т.е. данная сумма всегда есть константное число. Доказано.