Место для скобы

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

003997

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	2
3.	Класс	11
4.	Фамилия	КОВАЛЕВ
	Имя	КОНСТАНТИН
	Отчество	ВЛАДИМИРОВИЧ
5.	Дата рождения	Число: 10; Месяц: 04; Год: 2003
6.	Страна	Россия
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	Томская обл.
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Томск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ лицей при ТПУ

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Ковал-

Место для скобы

Шифр 003997

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
26 б	5.04.21	Гендрико И.Ю.	[signature]

№2 $\sin x+\sin^3 x+2021\sin^5 x=\cos(2x)+\cos^3(2x)+2021\cdot\cos^5(2x)$

Рассмотрим ф-цию $f(t)=t+t^3+2021t^5$ - монотонно возрастает на $\mathbb{R}$ как сумма трех монотонно возрастающих функций

$\Rightarrow F(\sin x)=F(\cos(2x))$ будет иметь решения при $\sin x=\cos(2x)$

$\sin x=\cos(2x)$;

$\sin x=1-2\sin^2 x$; $\sin x\overset{\text{об}}{=}t$; $t\in[-1;1]$

$2t^2+t-1=0$

$\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\\sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ k\in\mathbb{Z}\\x=\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ n\in\mathbb{Z}\\x=\frac{5\pi}{6}+2\pi q;\ q\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

7 б

Ответ: $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ k\in\mathbb{Z}$;

$x=\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ n\in\mathbb{Z}$;

$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi q;\ q\in\mathbb{Z}$;

V

1	2	3	4	5
7	7	2	5	5

~~№1 (1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+2020}=\frac{x^2+2020-x}{x(x^2+2020)}\in\mathbb{Z}$~~

~~(2) $x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}\in\mathbb{Z}$~~

~~(3) $\frac{1}{x^2+2020}-\frac{2}{x}\in\mathbb{Z}$~~

~~Рассмотрим выражение (2):~~

~~$\frac{x^2-1}{x}$ - целое число~~

~~Очевидно, что $x^2\vdots x$, если (2) - целое число, то остаток от деления у числа x^2 (на x) равен остатку от деления числа x^2-1 (предыдущее число).~~

~~Вобщем выр-для~~

~~Очевидно, что $x^2\vdots x$, если $\frac{x^2-1}{x}$ - целое, то и $(x^2-1)\vdots x$. Получается, что два последовательных числа (отличающихся на 1)~~

Место для скобы

Шифр 003997

№1

(1) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2020} = \frac{x^2+2020-x}{x(x^2+2020)} \in \mathbb{Z}$

(2) $x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x} \in \mathbb{Z}$

(3) $\frac{1}{x^2+2020} - \frac{1}{x} = \frac{x-x^2-2020}{x(x^2+2020)} = -\left(\frac{x^2+2020-x}{x(x^2+2020)}\right) = -(1) \in \mathbb{Z}$

Рассмотрим выражение (2): $\frac{x^2-1}{x}$ - целое только при $x=1$

Подставля в (1) и (3) получаем: (1) $\frac{2020}{2021} \notin \mathbb{Z}$

(3) $-\frac{2020}{2021} \notin \mathbb{Z}$ $\Rightarrow x \neq 1$

7 б

$\Rightarrow$ не существует таких x, при которых выражения (1), (2) и (3) являются целыми

Ответ: нет, не существует.

№4 $\frac{x^3}{k+\sqrt[3]{2021^4}\cdot x} + \frac{\sqrt[3]{2021^4}\cdot x}{k+x^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{k}{x(x^2+\sqrt[3]{2021^4})}$

$x^3 = a$; $a>0$

$\sqrt[3]{2021^4}\cdot x = b$; $b>0$ $\Rightarrow$ $\frac{a}{k+b} + \frac{b}{k+a} \leq \frac{3}{2} - \frac{k}{a+b}$

Заметим, что неравенство инвариантно относительно одновременной замены a на b и b на a

$\frac{a}{k+b} + \frac{b}{k+a} + \frac{k}{a+b} \leq \frac{3}{2}$

$\frac{2\left(a(k+a)(a+b) + b(k+b)(a+b) + k(a+k)(b+k)\right) - 3(a+b)(a+k)(b+k)}{2(a+b)(a+k)(b+k)} \leq 0$

$\frac{a^2(a\cdot 2-k-b) + b^2(2\cdot b - a - k) + k^2(2\cdot k - a - b)}{2(k+a)(k+b)(a+b)} \leq 0$

Знаменатель всегда >0 из условия $\Rightarrow$ не влияет на знак неравенства

$\Leftrightarrow$ $a^2(2a-k-b) + b^2(2b-a-k) + k^2(2k-a-b) \leq 0$

Выполняется при $a=b=k$

$\begin{cases} k=a \\ a=b \end{cases}$ $\begin{cases} k=x^3 \\ x^3 = x\sqrt[3]{2021^4} \end{cases}$ $\begin{cases} k=x^3 \\ x=\sqrt[3]{2021^2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $k=2021^2$ - одно из значений k

Недост. обосн.

5 б

Место для скобы

Шифр 003997

№3

$p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$; $n > 1$; $n \in N$

$p(t) = t^n + \frac{5t^n}{t} + 3$

$p(t) = t^n\left(1 + \frac{5}{t}\right) + 3$

$p(t) = \sqrt{t^n\left(1+\frac{5}{t}\right)+3} \cdot \sqrt{t^n\left(1+\frac{5}{t}\right)+3}$

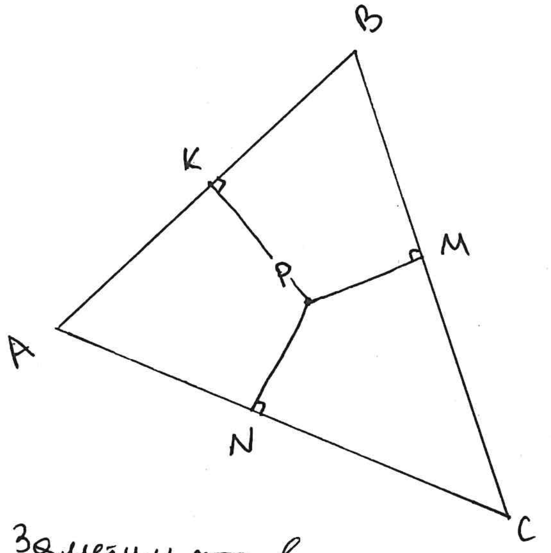
$p(t) = \left(t^n\left(1+\frac{5}{t}\right)+3\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(t^n\left(1+\frac{5}{t}\right)+3\right)^{\frac{1}{2}}$ – степени положительные, коэффициенты целые

=> Возможно, но выражение будет не упрощено до конца.

2б

Ответ неверный

N 5



В $\triangle ABC$: $\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK}$ будет минимально при максимальных PM; PN; PK => PM + PN + PK – должно быть максимальным

Точки K; M; N – ортогональные проекции точки P на стороны AB; BC и AC соответсвенно => $PK \perp BA$; $PM \perp BC$; $PN \perp AC$

~~Вокруг~~ Заметим, что вокруг AKPN, PKBM, MPNC можно описать окр-ть, т.к $\angle PNC$ и $\angle PMC$ – противолежащие и $\angle PNC + \angle PMC = 180°$

PK = PN, если P лежит на биссектрисе $\angle$ KAN, аналогично для биссектрисе углов $\angle$KBM и $\angle$MCN : => PM + PN + PK будет максимально, если P – точка пересечения биссектрис.

Ответ: P – точка пересечения биссектрис $\triangle ABC$

Недост. обосн.

5б