ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА
ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004421

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	К О Т О В
	Имя	С Т Е П А Н
	Отчество	С Е Р Г Е Е В И Ч
5.	Дата рождения	2 2 (число) 0 9 (месяц) 2 0 0 3 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	г Москва
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Москва
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	Предуниверситарий НИЯУ МИФИ

Шифр 004421

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
20	14.04.21	Корякина Е.Е.	

1	2	3	4	5	Σ
5	6	0	4	5	20

№2.

Введем функцию: $f(x) = x + x^5 + 2020x^9$, данная функция возрастает как сумма монотонно-возрастающих. Наше уравнение имеет вид: $f(\sin(2x)) = f(\cos(4x))$. Значит по свойству монотонных функций равенство может выполняться в том и только в том случае, когда:

$$\sin(2x) = \cos(4x) \Leftrightarrow \sin(2x) = 1 - 2\sin^2(2x) \Leftrightarrow \sin(2x) = -1 \text{ или}$$

$$\sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \text{ или } x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},$$

$k \in Z$, $n \in Z$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ или $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $k \in Z$, $n \in Z$.

5

№4.

Осуществим замену: $x^3 = a$, $m = b$, $2020^{\frac{4}{3}} \cdot x = c$, тогда исходное неравенство имеет вид: $\frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2a + 2b + 2c) \cdot \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) \le 9$$

[illegible] ?!!

(Прибавим к каждой скобке 1 и вынесем общий множитель за скобки). Но тогда по неравенству о среднем арифметическом и геометрическом первая скобка больше или равна $3 \cdot \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$, а вторая больше или равна

№4. продолжение

пояснения???

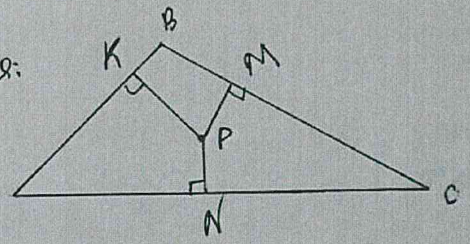
??. $3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)}$, значит их произведение больше или равно 9. Значит наше неравенство может выполняться только как равенство. Но неравенство о средних переходит в равенство только при равенстве переменных. Значит $a+b = b+c = a+c$, значит $a=b=c$. Значит $x^3 = 2020^{\frac{4}{3}}$.

$x = m$, значит $x = 2020^{\frac{2}{3}}$, тогда $m = 2020^2 = 4080400$??

Ответ: $m = 4080400$.

Решение-то где?? 1

№5.



Для краткости введём обозначения:

$PM = x$, $PN = y$, $PK = z$,

$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Тогда площадь BPC:

$S_{BPC} = \frac{1}{2}\cdot ax$; $S_{APC} = \frac{1}{2}\cdot b\cdot y$; $S_{APB} = \frac{1}{2}\cdot c\cdot z$, тогда

площадь исходного треугольника: $S_{ABC} = \frac{1}{2}(ax+by+cz)$,

$ax+by+cz = \cancel{2S_{ABC}}.\ 2S_{ABC}$.

Требуется найти минимум величины:

$F = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$, рассмотрим выражение:

$F\cdot 2\cdot S_{ABC}$ и оценим его.

$F\cdot 2\cdot S_{ABC} = \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right)\cdot(ax+by+cz) = a^2 + ab\cdot\frac{y}{x} +$

$+ac\cdot\frac{z}{x} + ab\cdot\frac{x}{y} + b^2 + bc\cdot\frac{z}{y} + ac\cdot\frac{x}{z} + bc\cdot\frac{y}{z} + c^2 =$

Место для скобы

Шифр 004421

№5. продолжение

$$= \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \cdot ab + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \cdot bc + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) \cdot$$

$$\cdot ac + a^2 + b^2 + c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac + a^2 + b^2 + c^2.$$

Поскольку $t + \frac{1}{t} \geq 2$ при $t > 0$ Вот и проверяем!!

Легко проверить, что равенство $F \cdot 2 \cdot S_{ABC} = 2ab + 2bc + 2ac + a^2 + b^2 + c^2$ достигается при $x = y = z$, значит точка P – центр вписанной окружности ΔABC.

Ответ: P – центр вписанной окружности ΔABC.

$\ne$

№1.

Если числа целые, то и их сумма целая, значит:

$x - \frac{1}{x^2+2021}$ – целое. Так как $\frac{1}{x^2+2021} < 1$ при любом x, то $x = k + \frac{1}{x^2+2021}$, где k – целое. При этом если k не нуль, то $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$, значит $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$ может быть целым числом только если: $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2+2021}$

(так как разность двух дробных чисел может быть целой только если она нулевая). Но уравнение $x = x^2 + 2021$ имеет отрицательный дискриминант $\Rightarrow k = 0$ – единственный вариант. Тогда $x = \frac{1}{x^2+2021}$.

Значит $x^3 + 2021x = 1$. Так как слева монотонно-возрастающая функция, то x должен лежать в промежутке от 0 до 1 (так как в нуле левая часть меньше 1, а в 1 – больше)

№1. продолжение

При этом $x^2 - x + 2021 = \frac{1}{x} - x$, значит так как $\frac{1}{x} - x$ – целое по условию, то $x^2 - x$ тоже целое.

Но на промежутке от 0 до 1: $x^2 - x$ принимает значение от $-\frac{1}{4}$ до 0 (минимум в вершине, максимум в концах отрезка), значит если оно равно целому числу, то только нуль. Значит такое может быть только при $x = 0$ или $x = 1$, но для них $x^3 + 2021x \neq 1$. Следовательно, таких чисел нет.

Ответ: таких чисел нет.