Место для скобы

004074

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	Математика
2.	Вариант	2
3.	Класс	8
4.	Фамилия	КОСТЫРЯ
	Имя	АНАСТАСИЯ
	Отчество	АЛЕКСЕЕВНА
5.	Дата рождения	Число: 06; Месяц: 04; Год: 2006
6.	Страна	Россия
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	Томская область
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Томск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МАОУ СОШ N 32, имени 19-ой гвардейской дивизии

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ______

то для
обы

Шифр 004074

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
35б	4.04.21	Гендрина И. Ю.	

1. $\frac{2ab(a^3-b^3)}{a^2+ab+b^2} - \frac{(a^4-b^4)(a-b)}{a^2-b^2} = \frac{2ab(a-b)\cancel{(a^2+ab+b^2)}}{\cancel{a^2+ab+b^2}} -$

$- \frac{\cancel{(a^2-b^2)}(a^2+b^2)(a-b)}{\cancel{a^2-b^2}} = 2ab\cdot(a-b) - (a^2+b^2)(a-b) =$

$= (a-b)(2ab-a^2-b^2) = -(a-b)(a^2-2ab+b^2) = -(a-b)(a-b)^2 =$

$= -(a-b)^3$

7б

Если $a=-1,\underbrace{8\ldots88}_{2021}$, $b=2,\underbrace{1\ldots11}_{2020}2$, то $-(a-b)^3 =$

$= -(-1,8\ldots888-2,1\ldots112)^3 = -(-4)^3 = -(-64) = 64$

$$\begin{array}{r} + \; 2,1\ldots112 \\ 1,8\ldots888 \\ \hline 4,0\ldots000 \end{array}$$

Ответ: 64 ✓

1	2	3	4	5
7	7	7	7	7

Место для скобы

Шифр 004074

2.1 $(y-2020)^2 - x^2 + 2x - 14 = 0$ $\qquad$ x, y – целые числа

$(y-2020)^2 - x^2 + 2x - 14 + 13 - 13 = 0$

$(y-2020)^2 - x^2 + 2x - 1 = 13$

$(y-2020)^2 - (x^2 - 2x + 1) = 13$

$(y-2020)^2 - (x-1)^2 = 13$

$(y - 2020 - x + 1)(y - 2020 + x - 1) = 13$ $\qquad$ 20б

$(y - x - 2019)(y + x - 2021) = 13$

т.к. x, y – целые числа, то $(y-x-2019)$ и $(y+x-2021)$ – целые числа

т.к. 13 – простое число т.е. делится только на себя и на 1, то нужно решить 4 системы уравнений:

1; 13

$$\begin{cases} y - x - 2019 = 1 \\ y + x - 2021 = 13 \end{cases}$$

$2y - 4040 = 14$

$2y = 4040 + 14$

$y = 2027$

$x = 7$

$(7; 2027)$

−1; −13

$$\begin{cases} y - x - 2019 = -1 \\ y + x - 2021 = -13 \end{cases}$$

$2y = 4040 - 14$

$y = 2013$

$x = -5$

$(-5; 2013)$

13; 1

$$\begin{cases} y - x - 2019 = 13 \\ y + x - 2021 = 1 \end{cases}$$

$2y = 4040 + 14$

$y = 2027$

$x = -5$

$(-5; 2027)$

Место для скобы

Шифр 004074

2. $-13; -1$

$$\begin{cases} y - x - 2019 = -13 \\ y + x - 2021 = -1 \end{cases}$$

$2y = 4040 - 14$

$y = 2013$

$x = 7$

$(7; 2013)$

Ответ: $(7; 2027)$, $(-5; 2013)$, $(-5; 2027)$, $(7; 2013)$.

3. 531 тыс (рублей) — стоимость машины

135 тыс (рублей) — стоимость электровелосипеда

$x \leq 15$ тыс — мелкие сопутствующие товары

7б

14.327,95 тыс — общая стоимость закупки

Пусть кол-во машины $= М$, кол-во электровел. $= Э \Rightarrow$

$\Rightarrow М, Э$ — натуральные числа

$531М + 135Э + x = 14.327,95$

$531М + 135Э = 14.327,95 - x$

Пусть $t = x - 0,95$ $\quad x \geq 0,95$ т.к. $(531М + 135Э)$ является целым числом

$531М + 135Э = 14327 - t \Rightarrow t$ является целым числом

$9(59М + 15Э) = 14327 - t \quad |:9$

$59М + 15Э = \frac{14327 - t}{9}$

Место для скобы

Шифр

3 $59М + 15Э = \frac{14327 - t}{9}$

$$\begin{array}{r|l} 14327 & 9 \\ \underline{9} & 1591 \\ 53 & \\ \underline{45} & \\ 82 & \\ \underline{81} & \\ 17 & \\ \underline{9} & \\ 8 & \end{array}$$

$59М + 15Э = 1591 + \frac{8 - t}{9}$

$59М + 15Э = 1591 - \frac{t+8}{9}$

т.к. t является целым числом, $1591 - \frac{t-8}{9}$ является целым числом (потому что $59М + 15Э$ – целое), то $\frac{t-8}{9}$ – целое число, значит $(t-8) \vdots 9$ или $t - 8 = 0$

Если $t - 8 = -9$, то $t = -1$, но t – натуральное т.к. $t = x - 0{,}95$, $x > 0{,}95$ и t – целое

Если $t - 8 < -9$, то $t < 0$, т.е. нам не подходит

Если $t - 8 = 0$, то $\boxed{t = 8}$ – удовлетворяет условиям

Если $t - 8 = 9$, то $t = 17$, но т.к. $x \leqslant 15$ $t = x - 0{,}95$, ~~то $t \leqslant 14{,}05$~~ то $t \leqslant 14$ (t – целое число), значит 17 нам не подходит

Если $t - 8 > 9$, то $t > 17$, нам это не подходит,

значит $\boxed{t = 8}$, $x = 8{,}95$,

$59М + 15Э = 1591$

Разделим 1591 на 59, чтобы выяснить максимальное число машин, которое могли купить:

Значит максимальное число машин = 26

$$\begin{array}{r|l} 1591 & 59 \\ \underline{118} & 26 \\ 411 & \\ \underline{354} & \\ 57 & \end{array}$$

$15Э = 1591 - 59М$

т.к. Э – натуральное, то $(1591 - 59М) \vdots 15 \Rightarrow$

Место для скобы

Шифр

3

$\Rightarrow (1591 - 59M) \vdots 5$

Чтобы $(1591 - 59M)$ делилось на 5, последняя цифра числа должна быть 5 или 0, значит от 1591 надо отнять ...1 или ...6, чтобы число было кратно 5,

Значит, $59M = \dots 1$ или $59M = \dots 6$

Чтобы последней цифрой произведения $59 \cdot M$ была 1, надо, чтобы последняя цифра числа M была равна 9

$M = \{9; 19\}$

т.к. $M \leqslant 26$

Чтобы последней цифрой произведения $59 \cdot M$ была 6, надо, чтобы последняя цифра числа M была равна 4

$M = \{4; 14; 24\}$

Найдём произведения 59M для каждого возможного M

$59 \times 9 = 531$; 59×19: $531 + 59\_ = 1121$; $59 \times 4 = 236$; 59×14: $236 + 59\_ = 826$; 59×24: $236 + 118\_ = 1416$

Теперь найдем разность $(1591 - 59M)$, мы знаем, что она должна быть кратна 3, т.к. она кратна 15 (это показано выше). Число кратно 3, если сумма его цифр кратна 3, поэтому определить кратность 3 можно „на глаз". (в уме посчитать)

$1591 - 531 = 1060 \not\vdots 3$

$1591 - 1121 = 470 \not\vdots 3$

$1591 - 236 = 1355 \not\vdots 3$

~~1591~~

$1591 - 826 = 765 \vdots 3$

$1591 - 1416 = 175 \not\vdots 3$

$\Rightarrow M = 14$, $Э = \frac{\cancel{765}^{\cancel{153}^{51}}}{\cancel{15}_{\cancel{3}}} = 51$

Ответ: $M = 14$, $Э = 51$, т.е. 14 Машин, 51 электровелосипед

Место для скобы

Шифр

4.

Дано: $a > b > c$

Док-ать: $a^2b - a^2c - c^2b > b^2a - b^2c - c^2a$ для любых a, b, c

Док-во:

$a^2b - a^2c - c^2b - b^2a + b^2c + c^2a > 0$

$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) > 0$

$a^2(b-c) + c^2(a-b) > -b^2(c-a)$

$a^2(b-c) + c^2(a-b) > b^2(a-c)$

~~a - c = ab~~ $a - c = (a-b) + (b-c)$

$a^2(b-c) + c^2(a-b) > b^2(a-b) + b^2(b-c)$

$a^2(b-c) - b^2(b-c) > b^2(a-b) - c^2(a-b)$

$\cancel{(b-c)}\cancel{(a-b)}(a+b) > \cancel{(a-b)}\cancel{(b-c)}(b+c)$

$a + b > b + c$ $\quad | -b$

$\underline{a > c}$ из неравенства $a > b > c \Rightarrow \underline{a > c} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2b - a^2c - c^2b > b^2a - b^2c - c^2a$

для любых a, b, c

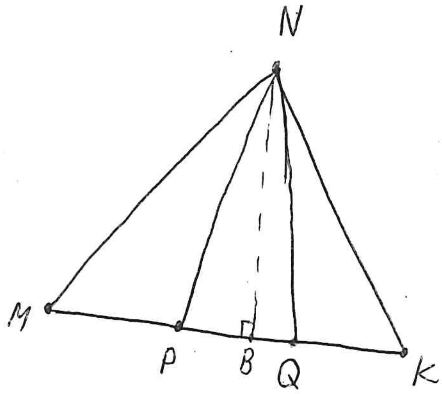
7б

Место для скобы

Шифр

5. Дано: $\triangle MNK$,
$P \in MK$,
$Q \in MK$,
$MP < MQ$

4 из данных отрезков имеют равные длины
($MN, NK, KQ, QP, PM, NP, NQ$)



Возможно ли, чтобы 3 остальные отрезка имели равные длины?

Ответ: ~~?~~ нет

Решение:

7 б

~~Для частного случая, к~~

1) Из сторон MN, PN, QN, NK равными могут быть только две, т.к. из одной вершины (N) на одну прямую (MK) можно отложить только две равных наклонных.

Значит, если в одной группе – 4 равные между собой стороны, а в другой – другие 3 стороны равные между собой, то в каждой из групп присутствуют две из сторон MN, MP, NQ, NK.

1.2) Из сторон MN, NP, NQ, NK равные должны быть по ~~одну сторону~~ разные стороны от перпендикуляра NB т.к. по одну сторону от перпендикуляра наклонной можно отложить только одну ~~сторону~~ наклонную определенной длины

2) ~~MN не~~ $MN \neq NK$ т.к. даже если и будет третья, равная ей сторона из MP, PQ, QK, то ~~от~~ другие 4 – не будут равны

3) $MN \neq NP$ т.к. тогда NQ и NK по одну сторону от перпендикуляра

Место для скобы

Шифр

4) Последний вариант — $MN = NQ$ и $NP = NK$ — не выполним т.к. $\angle MNB$ должен быть равен $\angle BNQ$ и $\angle PNB$ должен быть равен $\angle BNK$, и при этом все 4 ~~отрезка~~ вершины отрезков (кроме N) должны лежать на одной прямой, а это невозможно

Т.к. одновременно 2 пары отрезков NM, NQ, NP, NK быть равными между собой не могут, то разбить отрезки ~~треугольника~~ на две группы (3 и 4 отрезка) равных между собой нельзя.