ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

08170

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

Шифр

ет	МАТЕМАТИКА
нт	1.
	11
ия	КОРОТКОВ
	АНТОН
во	ФЕДОРОВИЧ
ождения	30 (Число) 08 (Месяц) 2005 (Год)
	Россия
(пр: Томская обл., нградская область)	~~Москва город~~. Московская область
иципального образования *деревня, село, город)*	Город.
нный пункт *(пр: Томск, зо, Псков)*	Москва
наименование ательного учреждения, ом Вы обучаетесь в время	ГБОУ Школа №1568 имени Пабло Неруды.

ие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e-mail льтатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ______

Шифр 08170

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
18	6.04	Коренкова Е.Е.	

1	2	3	4	5	Σ
5	0	0	6	7	18

Вариант 1.

Задача №1

$2x^2+2x^2z^2+z^2+7y^2-42y+33=0$, Решить в целых числах.

$2x^2+2x^2z^2+z^2+1-1+7(y^2-6y)+33=0$

$2x^2(1+z^2)+(1+z^2)+7(y^2-6y+9-9)+32=0$

$(1+z)^2(2x^2+1)+7(y-3)^2-7\cdot 9+32=0$

$(1+z^2)(2x^2+1)+7(y-3)^2-63+32=0$

$(1+z^2)^2(2x^2+1)+7(y-3)^2=31$.

Так как x, y, z – целые числа, то z^2 – целое, $1+z^2$ – целое

$2x^2$ – целое, $2x^2+1$ – целое

$y-3$ – целое

$(y-3)^2$ – целое.

Распишем число 31, как сумму двух целых чисел, (больших (или равных)) нуля: $z^2\ge0$; $x^2\ge0$

$z^2+1\ge1>0$; $2x^2\ge0$

$2x^2+1\ge0>0$; $(y-3)^2\ge0$

Так $7(y-3)^2$ содержит квадрат, то подходящие слагаемые:

0; $(y-3)=0$

7; $(y-3)=1$

28; $(y-3)^2=2$; $(y-3)^2=4\to 7(y-3)^2=28$.

на этом ряд заканчивается, так $7\cdot3^2=7\cdot9=63>31$.

$31 = 0 + 31$ (1 случай)

$31 = \cancel{\ldots} 7 + 24$ (2 случай)

см. на предыдущей странице

$\cancel{\ldots}$ $31 = 28 + 3$ (3 случай)

Так как $(2x^2+1)$ и $(1+z^2)$ – натуральные, будем раскладывать число по их натуральным делителям

1) $31 = 0 + 31$; $(y-3)^2 = 0$; $y = 3$

$(1+z^2)(2x^2+1) = 31$; $31 = 1 \cdot 31 = 31 \cdot 1$.

$\begin{cases} 1+z^2 = 1 \\ 2x^2+1 = 31 \end{cases}$ $\begin{cases} z^2 = 0 \\ 2x^2 = 30 \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 = 15 \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0 \\ x = \pm\sqrt{15} \end{cases}$ – не целое

$\begin{cases} 1+z^2 = 31 \\ 2x^2+1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} z^2 = 30 \\ 2x^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z = \pm\sqrt{30} \text{ – не целое} \\ x = 0. \end{cases}$

Итог: нет решений

2) $31 = 7 + 24$. В этом случае $7(y-3)^2 = 7$ $(y-3)^2 = 1$; $\left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = 4. \end{array}\right.$

$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = 6 \cdot 4 = 8 \cdot 3 = 12 \cdot 2 = 24 \cdot 1$

$\begin{cases} 1+z^2 = 1 \\ 2x^2+1 = 24 \end{cases}$; $\begin{cases} z^2 = 0 \\ 2x^2 = 23 \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 = \frac{23}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0 \\ x = \sqrt{\frac{23}{2}} \end{cases}$ – не целое

$\begin{cases} 1+z^2 = 2 \\ 2x^2+1 = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} z^2 = 1 \\ 2x^2 = 11 \end{cases}$ $\begin{cases} z = \pm 1 \\ x^2 = \frac{11}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} z = \pm 1 \\ x = \sqrt{\frac{11}{2}} \end{cases}$ – не целое

$\begin{cases} 1+z^2 = 3 \\ 2x^2+1 = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} z^2 = 2 \\ 2x^2 = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} z = \pm\sqrt{2} \text{ – не целое} \\ x^2 = \frac{7}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} 1+z^2 = 4 \\ 2x^2+1 = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} z^2 = 3 \\ 2x^2 = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} z = \pm\sqrt{3} \text{ – не целое} \\ x^2 = \frac{5}{2}. \end{cases}$

Шифр 08170

$\begin{cases} 1+z^2=6 \\ 2x^2+1=4 \end{cases}$ $\begin{cases} z^2=5 \\ 2x^2=3 \end{cases}$ $\begin{cases} z=\pm\sqrt{5} \text{ – не целое} \\ x^2=\frac{3}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} 1+z^2=8 \\ 2x^2+1=3 \end{cases}$ $\begin{cases} z^2=7 \\ 2x^2=2 \end{cases}$ $\begin{cases} z=\pm\sqrt{7} \text{ – не целое} \\ x^2=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 1+z^2=12 \\ 2x^2+1=2 \end{cases}$ $\begin{cases} z^2=11 \\ 2x^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} z=\pm\sqrt{11} \text{ – не целое} \\ x^2=\frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} 1+z^2=24 \\ 2x^2+1=1 \end{cases}$ $\begin{cases} z^2=23 \\ 2x^2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} z=\pm\sqrt{23} \text{ – не целое} \\ x^2=0 \end{cases}$

Итог: нет решений

3) $31=28+3$; В таком случае $7(y-3)^2=28$ $(y-3)^2=4$ $\left[\begin{array}{l} y=5 \\ y=1 \end{array}\right.$

$3=1\cdot3=3\cdot1$.

$\begin{cases} 1+z^2=1 \\ 2x^2+1=3 \end{cases}$ $\begin{cases} z^2=0 \\ 2x^2=2 \end{cases}$ $\begin{cases} z=0 \\ x^2=1 \end{cases}$ $\left.\begin{array}{l} \begin{cases} z=0 \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} z=0 \\ x=-1 \end{cases} \end{array}\right\}$ 2 упорядоченных решения

$\begin{cases} 1+z^2=3 \\ 2x^2+1=1 \end{cases}$ $\begin{cases} z^2=2 \\ 2x^2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} z=\pm\sqrt{2} \text{ – не целое} \\ x^2=0 \end{cases}$

В итоге нет решений,

при $7(y-3)^2=28$: $(y-3)^2=4$. два решения.

Значит, всего их четыре, так как $(y-3)^2=4$; $\left[\begin{array}{l} y-3=2 \\ y-3=-2 \end{array}\right.$

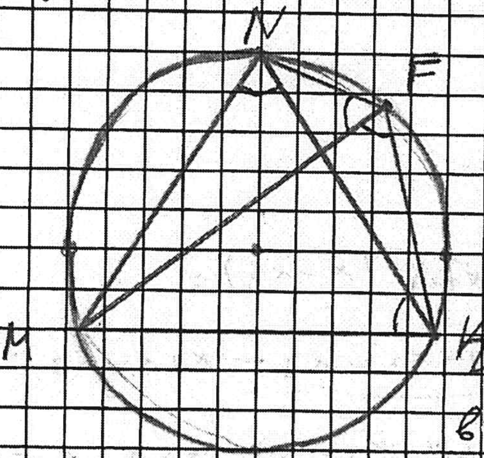
Тогда все решения: $\left[\begin{array}{l} y=5 \\ y=1 \end{array}\right.$

(см. ~~следующую~~ следующую страницу)

$$\left[\begin{array}{l} y=5\\ x=1\\ z=0\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y=5\\ x=-1\\ z=0\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y=1\\ x=1\\ z=0\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y=1\\ x=-1\\ z=0\end{array}\right.$$

Ответ: $\{(1;5;0);(-1;5;0);(1;1;0);(-1;1;0)\}$.

Задача №5



Решение.

1) Пусть сторона равностороннего треугольника $\triangle MNK$ равна a. Тогда запишем теорему косинусов для треугольников $\triangle NMF$; $\triangle KMF$, $\triangle FNK$.

2. $\angle MNK = \angle MFK = 60^\circ$ (вписанные углы)

$\angle MKN = \angle MFN = 60^\circ$ (вписанные углы)

в $\triangle MNF$:

$$MN^2 = FN^2 + FM^2 - 2FN\cdot FM\cdot\cos\angle NFM$$
$$a^2 = FN^2 + FM^2 - FN\cdot FM.$$

в $\triangle KMF$: $MK^2 = FM^2 + FK^2 - 2FM\,FK\cdot\cos\angle MFK$

$$a^2 = FM^2 + FK^2 - FM\cdot FK$$

в $\triangle NKK$: $\angle MFK = \angle NFM + \angle KFM = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

$$NK^2 = FN^2 + FK^2 - 2\cdot FN\cdot FK\cdot\cos\angle NFK$$
$$a^2 = FN^2 + FK^2 + FN\,FK.$$ Запишем это как систему:

$$\begin{cases} FN^2 + FN^2 - FN\,FM = a^2 & (1)\\ FM^2 + FK^2 - FM\,FK = a^2 & (2)\\ FN^2 + FK^2 + FN\,FK = a^2 & (3)\end{cases}$$

$(1)-(2)$: $FN^2 - FK^2 - FN\,FM + FM\,FK = 0$

$(FN - FK)(FN+FK) - FM(FN - FK) = 0$

$(FN - FK)(FN + FK - FM) = 0.$

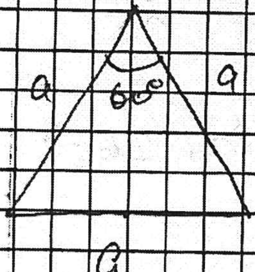
$$\left[\begin{array}{l} FN = FK\\ FN + FK - FM = 0\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} FN = FK\\ FM = FN + FK.\end{array}\right.$$

~~Если точка F выбрана на стороне дуги MK ..., то FN=FK и FM=2FN.~~
~~Тогда $FN^4+FK^4+FM^4=2FN^4+$~~

Если $FN=NK$, тогда так как $NM=MK$, FM - общая] $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta FNM=\Delta FKM \Rightarrow \angle KMF=\angle NMF \Rightarrow MF$ - биссектриса $\angle NMK$

А так как ΔMNK - правильный, то MF - диаметр



По т. синусов, $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=d=FM$$

$$FM=\frac{2\sqrt{3}a}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$FN=FK=\frac{FM}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow FM^4+FN^4+FK^4=a^4\left(\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^4+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4\right)=$$

$$=a^4\cdot\left(\frac{16}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)=\frac{18}{9}a^4=2a^4.$$

Если $FN\neq FK$, то: $FM=FN+FK$.

~~...~~ Пусть $FN=b$; $FK=c$, тогда $MF=b+c$

ΔNFK: $NK^2=NF^2+FK^2-2FN\cdot FK\cdot\cos 120$ (теорема косинусов)

$$a^2=b^2+c^2+bc$$

$$FN^4+FK^4+FM^4=b^4+c^4+(b+c)^4=b^4+c^4+(b^2+2bc+c^2)^2=$$

$$=b^4+c^4+b^4+2b^3c+b^2c^2+2b^3c+4b^2c^2+2bc^3+b^2c^2+2bc^3+c^4=$$

(продолжение № 5)

~~$2b^4+2c^4...$~~

$=2b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+2c^4=2(b^4+2b^3c+3b^2c^2+2bc^3+c^4)$

$a^2=b^2+c^2+cb$; $a^4=(b^2+c^2+cb)(b^2+c^2+cb)=$

$=b^4+b^2c^2+b^3c+b^2c^2+c^4+bc^3+b^3c+bc^3+b^2c^2=$

$=b^4+2b^3c+3b^2c^2+2bc^3+c^4$

Стало быть,

$FM^2+FN^2+FK^2=2(b^4+2b^3c+3b^2c^2+2bc^3+c^4)=2a^4$.

Значит эта сумма не зависит от изменения точки F, так как a - сторона треугольника MNK

что и требовалось доказать.

~~Задача № 3.~~

~~$2^{\lg(x^2-2023)}-\lg(2^{x^2-2022})=0$~~

~~$2^{\lg(x^2-2023)}=\lg(2^{x^2-2022})$~~ ~~; ОДЗ: $x^2-2023>0$~~

~~$\frac{2^{\lg(x^2-2023)}}{x^2-2022}=\lg 2$~~

Задача № 4

ax^3-ax^2+bx+b. Корни: x_1, x_2, x_3.

Значит тот же самый многочлен можно переписать по-другому:

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=(x^2-x_2x-x_1x+x_1x_2)(x-x_3)=$

$=(x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2)(x-x_3)=$

Шифр

(продолжение №4)

$= x^3 - x^2(x_1 + x_2) + x(x_1 x_2) - x^2 \cdot x_3 + x(x_1 + x_2) \cdot x_3 - x_1 x_2 x_3 =$

$= x^3 - x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x(x_1 x_2) + x x_1 x_3 + x x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3 =$

$= x^3 - x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) - x_1 x_2 x_3 =$

$= x^3 + x^2 \cdot (-(x_1 + x_2 + x_3)) + x(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) - x_1 x_2 x_3 =$

$= ax^3 + x^2 \cdot (-a) + bx + b.$

Значит, $a = x_1 + x_2 + x_3$ (при x^2)
$a = 1$ (при x^3) $\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$b = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$ (при x)
$b = -x_1 x_2 x_3$ (при x^0, то есть просто b) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = -x_1 x_2 x_3.$

Проверим, является ли ноль корнем многочлена:

$a \cdot 0 - a \cdot 0 + b \cdot 0 + b = 0$ $\quad a \neq 0$

$b = 0$, но по условию, $b \neq 0$

Значит, 0 — не корень.

Значит, поделим на $x_1 x_2 x_3$

$\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$

Тогда: $(x_1 + x_2 + x_3) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 1 \cdot (-1) = -1$

Что и требовалось доказать.

Шифр

Задача №3.

$$\frac{2a}{3(b+c)}+\frac{2b}{3(a+c)}+\frac{2c}{3(a+b)}\geq 1$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

$$\frac{a(a+b)(a+c)+b(b+c)(a+b)+c(b+c)(a+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}\geq\frac{3}{2}$$

$$\frac{a(a^2+ac+ab+bc)+b(ab+b^2+ac+bc)+c(ab+bc+ac+c^2)}{(a^2+ac+ab+bc)(b+c)}\geq\frac{3}{2}$$

$$\frac{a^3+\boxed{a^2b}+a^2c+\overline{abc}+b^3+ab^2+b^2c+\overline{abc}+c^3+ac^2+bc^2+\overline{abc}}{\underbrace{a^2b}+abc+b^2a+b^2c+a^2c+ac^2+abc+bc^2}\geq\frac{3}{2}$$

$$\frac{a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc+a^3+b^3+c^3}{a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc}\geq\frac{3}{2}$$ 3abc

$$1+\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b}\geq\frac{3}{2}$$

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(a+c)}\geq\frac{1}{2}$$ Числа положительные $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2(a^3+b^3+c^3)\geq(a+b)(b+c)(a+c)$ — а это верно для всех положительных чисел.

Ч.Т.Д. доказ-во?

Задача №2

$$2^{\lg(x^2-2023)}-\lg(2^{x^2-2022})=0$$

$$\cancel{2^{\lg(x^2-2023)}}\ \cancel{-2^{\log_2(\lg(2^{x^2-2022}))}}=0$$

$$\lg(x^2-2023)=\log_2\left(\lg\left(2^{x^2-2022}\right)\right)$$

$$\cancel{\lg(x^2-2023)=\log_2\left((x^2-2022)\cdot\lg 2\right)}$$

$$\cancel{\lg(x^2-2023)-\log_2(x^2-2023)=-\log_2(\lg 2)}$$

$$\cancel{\lg(x^2-2023)-\frac{\lg(x^2-2023)}{\lg 2}=-\log_2(\lg 2).}$$

$$\lg(t-1)-\frac{\lg t}{\lg 2}=$$

Пусть $x^2-2023=t$, тогда: $x^2-2022=t+1$.

$$2^{\lg t}=\lg\left(2^{t+1}\right)=$$

$$2^{\lg t}=(t+1)\lg(2)$$

$$\frac{2^{\lg t}}{(t+1)}=\lg(2).$$ Рассмотрим функцию $f(t)=\frac{2^{\lg t}}{(t+1)}$.

$$f'(t)=\left(2^{\lg t}\cdot(t+1)^{-1}\right)'=\ln(2)\cdot 2^{\lg t}\cdot\frac{1}{\ln 10\cdot t}\cdot(t+1)^{-1}+2^{\lg t}\cdot(-1)\cdot(t+1)^{-2}$$

$$=\frac{\ln(2)\cdot 2^{\lg t}}{\ln(10)\cdot t\cdot(t+1)}-\frac{2^{\lg t}}{(t+1)^2}=\frac{2^{\lg t}}{t+1}\left(\frac{\ln(2)}{\ln(10)\cdot t}-\frac{1}{t+1}\right)=$$

Найдем производную, чтобы определить точку ~~экстремума~~ излома функции и посчитать кол-во пересечений с прямой $\ln(2)$