Место для скобы

003741

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	1
3.	Класс	11
4.	Фамилия	КОМАРОВ
	Имя	АЛЕКСЕЙ
	Отчество	КОНСТАНТИНОВИЧ
5.	Дата рождения	20 (Число) 08 (Месяц) 2003 (Год)
6.	Страна	РОССИЯ
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	НОВОСИБИРСКАЯ ОБЛ.
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	ГОРОД
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	НОВОСИБИРСК
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	Аэрокосмический лицей им. Ю. В. Кондратюка

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ________________

Место для скобы

Шифр 003741

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
22	1.04.21	Коряжкина Е.Е.	[illegible]

1	2	3	4	5	Σ
6	5	7	2	2	22

① $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$; $x-\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$

Так как 1-ое и 3-е выражения противоположны по знакам, то сложим их и 2-ое выражение.

Пусть все 3 числа целые, тогда и сумма этих 3-ех чисел целая. Сложим их:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}+x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}=Z \quad , Z\text{ - целое}$$

$$x-\frac{1}{x}=Z$$

Это выражение может быть целым только при $x=1, x=-1$ при любых других случаях оно не целое.

Если x - целое, тогда $\frac{1}{x}$ нецелое и наоборот

А при $x=1$, 1-ое выражение:

$\frac{1}{1}-\frac{1}{1+2021}$ - нецелое, аналогично $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$

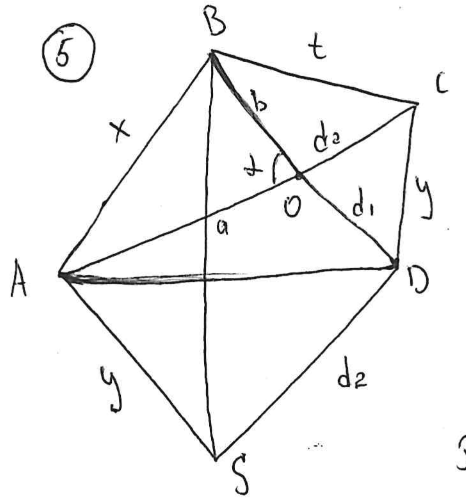
Поэтому такого целого числа x, что все 3 выражения являются целыми.

±

Место для скобы

Шифр 003741

(5)



Дано:

$S_{ABCD} = 32$

$AB + CD + BD = 16$

$d_2 - ?$

Решение:

1) Пусть $AO = a$; $OB = b$; $AC = d_2$; $BD = d_1$

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha = 32$

3) $x + y + d_1 = 16$, значит $x + y = 16 - d_1$

$\begin{cases} a + b > x \\ d_2 - a + d_1 - b > y \end{cases}$

$d_1 + d_2 > x + y$

$d_1 + d_2 > 16 - d_1$

$d_2 > 16 - 2d_1 > 0$

$\sin\alpha = \frac{32}{\frac{1}{2} d_1 d_2} = \frac{64}{d_1 d_2}$

$0 < \sin \leq 1$

$0 < \frac{64}{d_1 d_2} \leq 1$

$d_1 d_2 \geq 64$

$2d_1 < 16$

$d_1 < 8$

$\Rightarrow$

$d_2 > 8$

$d_2 < x + y + d_1$ ($BS < x + y$, $d_2 < BS + d_1$)

$d_2 < 16$

$8 < d_2 < 16$

Ответ: $8 < d_2 < 16$

F

Место для скобы

Шифр 003741

(2) $\sin x+\sin^2 x+2020\sin^5 x=\cos 2x+\cos^3 2x+2020\cos^5 2x$

$2020(\cos^5 2x-\sin^5 x)+(\cos^3 2x-\sin^3 x)+\cos 2x-\sin x=0$, $\cos 2x=a;\ \sin x=b$

$2020(a^5-b^5)+(a^3-b^3)+a-b=0$

$2020(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)+(a-b)(a^2+ab+b^2)+(a+b)=0$, $\frac{a}{b}=t$

Вынесем b^4 и b^2, т.к уравнение однородное:

$$(a-b)\left(\frac{2020}{b^4}\left(t^4+t^3+t^2+t+1\right)+\frac{1}{b^2}\left(\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+1\right)+1\right)=0\right.$$

$$(a-b)\left(\frac{2020}{b^4}\left(t^2+t+1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)+\frac{1}{b^2}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{a}{b}\right)+1\right)\right)=0$$

Докажем, что это >0

$t^2+t+1=0$

$D<0$

$t^2+\frac{1}{t^2}+\left(t+\frac{1}{t}\right)+1=0$

$t+\frac{1}{t}=y$

$t^2+2+\frac{1}{t^2}=y^2$

$t^2+\frac{1}{t^2}=y^2-2$

$y^2-2+y+1=0$

$y^2+y-1=0$

$D=\sqrt5$

$y_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt5}{2}$

$t^2+1=\frac{1+\sqrt5}{2}\cdot t$

$t^2-\frac{1+\sqrt5}{2}t+1=0$

$\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2-4<0$

$\frac{1+2\sqrt5+5}{4}-4<0$

$2\sqrt5+6-16<0$

$\sqrt{20}-\sqrt{100}<0$

(+)

$\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^2-4<0$

$\frac{1-2\sqrt5+5}{4}-4<0$

$6-2\sqrt5-16<0$

(+)

$\Downarrow$

строго >0, а значит, что только $a-b=0$

$\cos 2x-\sin 2x=0$

$1-2\sin^2 x-\sin x=0$

$2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$\sin=t$, $-1\leq t\leq 1$

$D=1+8=9$

$t_{1,2}=\frac{-1\pm3}{4}$ $\left[\begin{array}{l}t_1=-1\\ t_2=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x_1=-\frac{\pi}{2}+2\pi k\\ x_2=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k\end{array}\right.$

Ответ: $x_1=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$
$x_2=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$

Место для скобы

Шифр

③ $x^n + 5 \cdot x^{n-1} + 3 = A \cdot B$

$$\left.\begin{aligned} A &= a_0 + a_1 x^1 + a_2 \cdot x^2 + \ldots + b_n \cdot x^n \\ B &= b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \ldots + b_n \cdot x^n \end{aligned}\right\} \text{общий вид}$$

$a_0, a_1 \ldots a_n, b_0, b_1 \ldots b_n$ – целые числа

Проверим частные случаи

1) $n = 2$

$x^2 + 5x + 3 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 3 = 13$

$\sqrt{D}$ – иррацион. число, т.е коэф. нецелые

2) $n = 3$

$x^3 + 5x^2 + 3 = 0$

Для того чтобы решить это уравнение запишем формулу для коэф. A и B

$p_n = 1 = \sum a_0 \cdot b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots a_n b_1$

$p_{n-1} = 5 = \sum a_0 b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + \ldots + a_{n-1} b_0$

$\vdots$

$p_0 = 3 = a_0 b_0 \Rightarrow a_0 = 1;\ b_0 = 3$

или

$a_0 = 3;\ b_0 = 1$

для $n = 3$

$p_3 = 1 = a_0 b_3 + a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_3 b_0$

$p_2 = 5 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$

$p_1 = 0 = a_0 b_1 + a_1 b_0$

$p_0 = 3 = a_0 b_0$

$a_0 = 1;\ b_0 = 3$, подставим

$b_1 + 3a_1 = 0;\ b_1 = -3a$

$b_2 - 3a_1^2 + 3a_2 = 5$

$b_2 - 5 = 3a_1^2 + 3a_2$

Так как правая часть делится на 3, то и левая тоже

$b_2 \equiv 1 \pmod 3$

$b_3 + a_1 b_2 - 3a_1 a_2 + 3a_3 = 1$

$p_4 = 0 = a_3 b_1 + a_2 b_2 + b_3 a_1$

$p_5 = 0 = a_3 b_2 a_2$

$p_6 = 0 = a_3 b_3$

a_3 или $b_3 = 0$,

такого быть не может, противоречие условию.

Ответ: нельзя

Место для скобы

Шифр

4) $x>0$

$a>0$

$\sqrt[3]{2020^4}=M$

$z+\frac{1}{z}\geq 2$; $z>0$ - неравенств. о средн.

1) $\frac{x^3}{a+Mx}+\frac{Mx}{a+x^3}+\frac{a}{x^3+Mx}\leq\frac{3}{2}$

2) Пусть $x^2\geq M$, $\Rightarrow x^3\geq Mx\Rightarrow a+x^3\geq a+Mx\Rightarrow$

$\frac{1}{a+x^3}\leq\frac{1}{a+Mx}\Rightarrow$ в 1-ом слогаемом (*) знаменатель меняем на больший:

$$\frac{x^3}{a+x^3}+\frac{Mx}{a+x^3}+\frac{a}{x^3+Mx}\leq\frac{3}{2}$$

$$\frac{x^3+Mx}{a+x^3}+\frac{a}{x^3+Mx}\leq\frac{3}{2}$$

$$\underbrace{\frac{x^3+Mx}{a+x^3}}_{z}+\underbrace{\frac{a+x^3}{x^3+Mx}}_{\frac{1}{z}}-\frac{x^3}{x^3+Mx}\leq\frac{3}{2}$$

Тогда по неравенству о средних:

$$2-\frac{x^3}{x^3+Mx}\leq\frac{3}{2}$$

$$\frac{x^3}{x^3+Mx}\geq\frac{1}{2}$$

$$2x^3\geq x^3+Mx$$

$$x^3\geq Mx$$

$$x^2\geq M$$

предположение верное

Место для скобы

Шифр

Значит неравенство выполняется

$\forall a>0$. при $x^2 \geq m$

2) $x^2 < m$ (аналог)

$a + mx > a + x^3$, тогда

$$\underbrace{\frac{x^3+mx}{a+mx} + \frac{a+mx}{x^3+mx}}_{2} - \frac{mx}{x^3+mx} \leq \frac{3}{2}$$

$$2 - \frac{mx}{x^3+mx} < \frac{3}{2}$$

$$\frac{mx}{x^3+mx} > \frac{1}{2}$$

$mx > x^3$

$m > x^2$ ч.т.д

Ответ: нерав-во имеет решение $x>0$ для всех $a>0$.