ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004521

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 10 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	10
4.	Фамилия	К О Л О С О В
	Имя	А Л Е К С А Н Д Р
	Отчество	Д М И Т Р И Е В И Ч
5.	Дата рождения	05 (число) 03 (месяц) 2004 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Челябинская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Челябинск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МАОУ "Гимназия №26 г.Челябинска"

1	2	3	4	5	Σ
0	7	7	7	7	28

Место для скобы

Шифр 004521

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

Задание 2

$$\begin{cases} (1)\ 3xy - 5yz - xz = 3y \\ (2)\ -5xy + 4yz + xz = -4y \\ (3)\ xy + yz = -y \end{cases}$$

• Из (3) следует: $xy + yz = -y$

$* \quad y(x+z) = -y$

$x + z = -1$

$x = -z - 1$

• $(1)+(2): \begin{cases} -2xy - yz = -y \\ (3):\ xy + yz = -y \end{cases} \Rightarrow (1)+(2)+(3): -xy = -2y \Rightarrow x = +2$

$\Downarrow$

$z = -3$

Найдём y: $3 \cdot 2y - 5 \cdot y \cdot (-3) - 2 \cdot (-3) = 3y$

$18y = -6$

$y = -\frac{1}{3}$ $\Rightarrow (x; y; z) = (2; -\frac{1}{3}; -3)$

Проверка: (1) $3 \cdot 2 \cdot (-\frac{1}{3}) - 5 \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot (-3) - 2 \cdot (-3) = 3 \cdot (-\frac{1}{3})$

$-2 - 5 + 6 = -1$

$-7 + 6 = -1$

$-1 = -1$

(2) $-5 \cdot 2 \cdot (-\frac{1}{3}) + 4 \cdot (-\frac{1}{3})(-3) + 2 \cdot (-3) = -4 \cdot (-\frac{1}{3})$

$\frac{10}{3} + 4 - 6 = \frac{4}{3}$

$\frac{10}{3} = \frac{4}{3} + 2^{1 \cdot 3}$

$\frac{10}{3} = \frac{10}{3}$

(3) $xy + yz = -y$

$2 \cdot (-\frac{1}{3}) + (-\frac{1}{3}) \cdot (-3) = -(-\frac{1}{3})$

$-\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$*$ – При условии, что $y \neq 0$

Если $y=0$, то или x, или z также $=0$ (или оба)

$(x; y; z) = (0; 0;$ любое число$)$ } Также являются решениями

$(x; y; z) = ($любое число$; 0; 0)$

Ответ: $(2; -\frac{1}{3}; -3)$; $(0; 0;$ люб. число$)$; $($любое число$; 0; 0)$

Место для скобы

Шифр 004521

Задание 3

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(0) = c$

$f(1) = a + b + c$

$\left.\begin{matrix} f(0) = c \\ f(1) = a+b+c \end{matrix}\right\} f(0)+f(1)=0 \Rightarrow 2c+a+b=0$

$f(2) = 4a+2b+c$

$f(3) = 9a+3b+c$

$\left.\begin{matrix} f(2) = 4a+2b+c \\ f(3) = 9a+3b+c \end{matrix}\right\} f(2)+f(3)=0 \Rightarrow 13a+5b+2c=0$

$\begin{cases} (1)\ 2c+a+b=0 \\ (2)\ 13a+5b+c\cdot 2=0 \end{cases}$

$(2)-(1)$: $12a+4b=0 \Rightarrow 12a=-4b \Rightarrow 3a=-b \Rightarrow b=-3a$

Домножим (1) на 5 и вычтем из него (2): $8c-8a=0 \Rightarrow a=c$

$f(x) = ax^2+bx+c = 2022$

$ax^2 - 3ax + a = 2022$

$ax^2 - 3ax + (a-2022) = 0$

$D = 9a^2 - 4\cdot a\cdot(a-2022) = 5a^2 + 8088a$

Раз просят найти сумму корней $\Rightarrow$ их 2 $\Rightarrow D>0$

$x_{12} = \dfrac{3a \pm \sqrt{5a^2+8088a}}{2a}$

Искомая сумма корней: $\dfrac{3a+\sqrt{5a^2+8088a}}{2a} + \dfrac{3a-\sqrt{5a^2+8088a}}{2a} = \dfrac{6a}{2a} =$

$= 3$

Ответ: 3

Место для скобы

Задание 4

Шифр 004521

$$\sqrt[2020]{2019\cdot 2020^{-1}}+\sqrt[2020]{2020\cdot 2017^{-1}}>2$$

$$\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}+\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}>2$$

По неравенству о средних:

$$\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}+\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}\geq 2\cdot\sqrt[2]{\left(\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}\right)\left(\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}\right)}$$

$2\sqrt[2]{\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}\cdot\frac{2020}{2017}}}=2\cdot\sqrt[2]{\sqrt[2020]{\frac{2019}{2017}}}$. Докажем, что данное выражение >2:

$$2\cdot\sqrt[2]{\sqrt[2020]{\frac{2019}{2017}}}>2 \quad |:2$$

$$\sqrt[2]{\sqrt[2020]{\frac{2019}{2017}}}>1 \quad |\cdot \text{Возведём обе части в квадрат}$$

$$\sqrt[2020]{\frac{2019}{2017}}>\underset{1}{\overset{\shortparallel}{1^2}} \quad |\cdot \text{Возведём обе части в 2020 степень}$$

Используя то, что $(\sqrt[n]{a})^n=a$, получаем:

$$\frac{2019}{2017}>\underset{1}{\overset{\shortparallel}{1^{2020}}}$$

$\frac{2019}{2017}\approx 1{,}00095$, т.е. больше 1. $\Rightarrow 2\sqrt[2]{\left(\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}\right)\left(\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}\right)}>2$

Т.к. по неравенству о средних $\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}+\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}$ больше

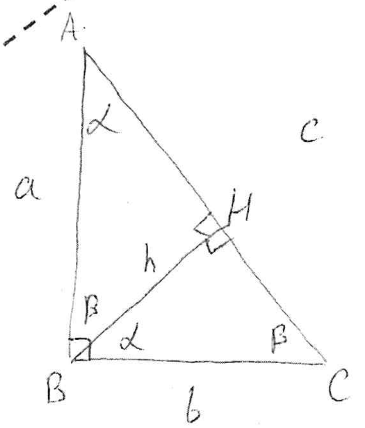
$\Rightarrow$ оно также больше 2, т.е. изначальное неравенство доказано

ЧТД

Место для скобы

Задание 5

Шифр



Обозначим углы $\triangle ABC$ за α и β.

В маленьких треугольниках доставим α или β, т.к. $\alpha+\beta=90^\circ$, а в них один из этих углов уже имеется.

Получим, что $\triangle ABC$; $\triangle ABH$; $\triangle BCH$ имеют по 3 равные угла $\Rightarrow$ они подобны по 3 углам.

Запишем отношения для $\triangle ABC$ и $\triangle BCH$:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BH} \Rightarrow AC \cdot BH = AB \cdot BC \Rightarrow ch = ab$$

Пусть $c+h < a+b$. Возведём обе части в квадрат:

$$c^2 + \cancel{2ch} + h^2 < \underbrace{a^2 + \cancel{2ab} + b^2}_{c^2}$$ (2ch и 2ab уходят, т.к. $ch=ab$)

$$c^2 + h^2 < c^2$$ (по т. Пифагора)

Очевидно, что неравенство верно только при $h^2 < 0$, но число в квадрате (ещё и положительное) не может быть <0.

Следовательно $c+h$ не может быть меньше $a+b$

ЧТД

Задание 1

Ответ: Нет, не существует