ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

07434

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

Шифр

мет	Математика
ант	1
:	11
лия	КОДРЯН
	АННА
тво	СЕРГЕЕВНА
рождения	19 (Число) 06 (Месяц) 2005 (Год)
а	Россия
н *(пр: Томская обл., инградская область)*	Новосибирская область
ниципального образования *п, деревня, село, город)*	город
енный пункт *(пр: Томск, ово, Псков)*	Карасук
е наименование овательного учреждения, ром Вы обучаетесь в е время	МБОУ технический лицей №176

асие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e-mail зультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Кодрян

1	2	3	4	5
7	0	0	7	2

Шифр 07434

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
16 б	30.03.23	Гендрина	

1. $ax^3-ax^2+bx+b=0$. Т.к. a и b - нецелые, все коэффициенты поделим на a.

По т. Виета

$$\begin{cases} x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\frac{b}{a} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{b}{a} \\ x_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$$

Получаем:

$$x^3-x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b}{a}=0$$

Преобразуем выражение

$$(x_1+x_2+x_3)\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-1.$$

$$1\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-1.$$

$$\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}=-1$$

$$\frac{b}{a}:\left(-\frac{b}{a}\right)=-1$$

$$\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{a}{b}\right)=-1$$

$-1=-1$, ч. т. д.

7 б

1. $2x^2+2x^2z^2+z^2+7y^2-42y+33=0$

$2x^2(1+z^2)+z^2+7(y^2-6y)+33=0$

Представим z^2+33 как $(z^2+1)+32$, а $7(y^2-6y)$ как $7(y-3)^2-63$

Получим.

$2x^2(1+z^2)+(1+z^2)+32+7(y-3)^2-63=0$

7 б

Шифр 07434

$(1+z^2)(2x^2+1)+7(y-3)^2-31=0$

$(1+z^2)(2x^2+1)+7(y-3)^2=31$

Заметим, что $0<y<6$, т.к. при 0 и 6 получаем, что

$(1+z^2)(2x^2+1)+63=31 \Rightarrow (1+z^2)(2x^2+1)=-32$, что невозможно, т.к. $1+z^2$ и $2x^2+1$ принимают положительные значения при любых x и z.

Та же ситуация со y значениями, не принадлежащими промежутку $0<y<6$

Пусть $y=1$

Тогда $(1+z^2)(2x^2+1)+28=31$

$(1+z^2)(2x^2+1)=3$

Получаем, что

$\begin{cases} 1+z^2=3 \\ 2x^2+1=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 1+z^2=1 \\ 2x^2+1=3 \end{cases}$

$\begin{cases} z^2=2 \text{ - невозможно} \\ x^2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} z^2=0 \\ x^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z=0 \\ x=1 \end{matrix}$ или $\begin{matrix} z=0 \\ x=-1 \end{matrix}$

Выходит 2 решения $(1;1;0)$ и $(-1;1;0)$

Пусть $y=2$.

$(1+z^2)(2x^2+1)=24$.

$24=24\cdot1=12\cdot2=6\cdot4=8\cdot3$.

скобы

Шифр 07434

Ни одна пара не дает целых решений для x и z $\Rightarrow$ $y = 2$ не подходит.

Аналогично, если $y = 4$.

Пусть $y = 3$.

$(1+z^2)(2x^2+1) = 31$

$\Rightarrow \begin{cases} 1+z^2 = 1 \\ 2x^2+1 = 31 \end{cases}$ или $\begin{cases} 1+z^2 = 31 \\ 2x^2+1 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} z^2 = 0 \\ x^2 = 15 \text{ – невозможно} \end{cases}$ $\begin{cases} z^2 = 30 \text{ – невозможно} \\ x^2 = 0 \end{cases}$

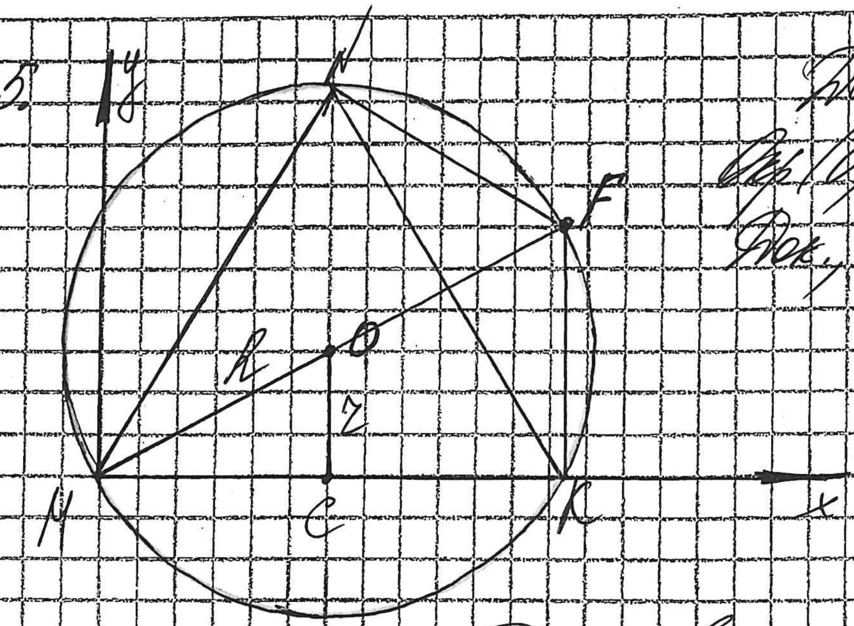
При $y = 3$ нет целых решений для x и z.

При $y = 5$ получаем то же, что и при $y = 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $y = 5$ существует 2 решения $(1; 5; 0)$ и $(-1; 5; 0)$

Ответ: $(1; 1; 0)$; $(-1; 1; 0)$; $(1; 5; 0)$; $(-1; 5; 0)$

5.



Дано: $\triangle MNK$ – равностор.; Окр.$(O;R)$; $F \in$ окр.

Док., что $FM^4 + FN^4 + FK^4 = const$

(2б)

Док-во:

Введём систему координат. Пусть сторона треугольника равна 2.

Найдём координаты точек M, N, K, F, O.

$M(0;0)$

$N(1; R+r)$

$K(2;0)$

$F(x_1; y_1)$

$O(1; r)$

OM – радиус $\Rightarrow$ делит $\angle NMK$ пополам.

В $\triangle MOC$: $tg\angle OMC = \frac{r}{1}$

$tg 30^\circ = \frac{r}{1} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow R = 2r = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Тогда $N(1; \frac{3}{\sqrt{3}})$ и $O(1; \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Получим вектора

$FM = \{x_1; y_1\}$

$FN = \{x_1 - 1; y_1 - \sqrt{3}\}$

$FK = \{x_1 - 2; y_1\}$

Т.к. точка P лежит на окружности, напишем уравнение окружности и подставим координаты точки P.

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4}{3}.\quad P(x_1;y_1)$$

$$(x_1-1)^2+\left(y_1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4}{3}$$

$$3(x_1-1)^2+3\left(y_1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=4$$

$$3(x_1-1)^2+(\sqrt{3}\,y_1-1)^2=4$$

Т.к. $\bar{a}\cdot\bar{a}=|a|^2$

$$PM^2+PN^2+PK^2=x_1^2+y_1^2+(x_1-1)^2+(y_1-\sqrt{3})^2+$$

$$+(x_1-2)^2+y_1^2=x_1^2+y_1^2+x_1^2-2x_1+1+y_1^2-2\sqrt{3}\,y_1+3+$$

$$+x_1^2-4x_1+4+y_1^2=3x_1^2+3y_1^2-6x_1-2\sqrt{3}\,y_1+8=$$

$$=3(x_1^2-2x_1+1)-3+(3y_1^2-2\sqrt{3}\,y_1+1)-1+8=$$

$$=3(x_1-1)^2+(\sqrt{3}\,y_1-1)^2+4=4+4=8\Rightarrow$$

$$\Rightarrow PM^2+PN^2+PK^2=8=const,$$ ч.т.д.

3.