

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
19	31.03.21	Коржикова Е.Е.	Ц

$$N1. \frac{2(a^4b+ab^4)}{a^2-2ab+b^2} - \frac{(b^4-a^4)(b+a)}{a^2-b^2}$$

$$1) \frac{2(a^4b+ab^4)}{a^2-2ab+b^2} = \frac{2ab(a^3+b^3)}{(a-b)^2+ab} = \frac{2ab(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a-b)^2+ab} =$$

$$= 2ab(a+b)$$

$$2) \frac{(b^4-a^4)(b+a)}{a^2-b^2} = \frac{2a(b^3+a^3)(b-a)(b+a)}{a^2-b^2} = \frac{b^3+a^3 \cdot (b^2-a^2)}{-(b^2-a^2)} =$$

$$= -(b^3+a^3)$$

$$3) 2ab(a+b) + b^3+a^3 = 2a^2b(b+a)(b^2-ab+a^2) + 2ab(a+b) =$$

$$= (b+a)(b-a)^2+ab + 2ab(a+b) = (b+a)(b^2-2ab+a^2+3ab) =$$

$$= (b+a)(b^2+ab+a^2) = (a+b)^3 = (-3)^3 = -27$$

$$a+b = -1, 4 \dots 44 - 1, 5 \dots 56 = -3$$

Ответ: -27.

$$N4. a^4+b^4+c^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab$$

$$\left. \begin{array}{l} a^4+b^2c^2 \geq 2a^2bc \\ + b^4+a^2c^2 \geq 2b^2ac \\ + c^4+a^2b^2 \geq 2c^2ab \end{array} \right\} \text{ по неравенству среднего}$$

$$1(a^4+b^4+c^4) + (b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2) \geq 2(a^2bc + b^2ac + c^2ab)$$

$$a^4+b^4 \geq 2a^2b^2$$

$$+ b^4+c^4 \geq 2b^2c^2$$

$$+ a^4+c^4 \geq 2a^2c^2$$

$$2(a^4+b^4+c^4) \geq 2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$$

$$2(a^4+b^4+c^4) \geq 2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$$

Сложим неравенства 1 и 2

$$2(a^4+b^4+c^4) + (b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2) \geq (a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2) + 2(a^2bc +$$

$$+ b^2ac + c^2ab)$$

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab, \text{ з.т.г.}$$

1	2	3	4	5	Σ
7	5	0	7	0	19

$$N2. \begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2x \cdot z = 100 \Rightarrow 2x \cdot z = x^2 + 2y^2 - 100 \\ 2x \cdot y - z^2 = 100 \Rightarrow 2x \cdot y = z^2 + 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2x \cdot y \\ x^2 + z^2 \geq 2x \cdot z \end{cases} \quad + \begin{cases} x^2 + y^2 \geq z^2 + 100 \\ x^2 + z^2 \geq x^2 + 2y^2 - 100 \end{cases}$$

$$2x^2 + y^2 + z^2 \geq z^2 + x^2 - 2y^2$$

$$x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x = y$$

Пусть x и $y = t$, тогда

$$\begin{cases} t^2 + 2t^2 - 2t \cdot z = 100 \\ 2t^2 - z^2 = 100 \end{cases} \quad - \begin{cases} 3t^2 - 2t \cdot z = 100 \\ 2t^2 - z^2 = 100 \end{cases}$$

$$t^2 - 2t \cdot z + z^2 = 0$$

$$(t - z)^2 = 0 \Rightarrow t = z, \text{ тогда}$$

$$3t^2 - 2t^2 = 100$$

$$t^2 = 100$$

$$\begin{cases} t = 10 \\ t = -10 \end{cases}$$

Ответ: $(10; 10; 10) \cup (-10; -10; -10)$.

X