07436

Шифр

...ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

...мет	математика
...ант	1
...:	10 И
...лия	КОЧИНА
	СОФИЯ
...тво	ГЕРМАНОВНА
...рождения	10 (Число) 05 (Месяц) 2006 (Год)
...а	РФ
...н *(пр: Томская обл., ...инградская область)*	Новосибирская область
...ниципального образования *(...п, деревня, село, город)*	город
...енный пункт *(пр: Томск, ...рово, Псков)*	Карасук
...е наименование ...овательного учреждения, ...ором Вы обучаетесь в ...е время	МБОУ Технический лицей № 176 Карасукского района Новосибирской области

...асие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail ...зультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ________

1	2	3	4	5
2	0	7	7	5

Шифр 07436

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
21 б	30.03.23	Гендрина	

№4

$x^2+px-\frac{1}{2p^2}$, пусть $b=p$, $c=-\frac{1}{2p^2}$

Доказать: $x_1^4+x_2^4\geq 2+\sqrt{2}$

По теореме Виета: $x_1+x_2=-b=-p$

$x_1\cdot x_2=\cancel{-\frac{1}{2p^2}}\ c=-\frac{1}{2p^2}$.

$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2(x_1x_2)^2=((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)^2-2(x_1x_2)^2=$

$=(p^2+\frac{1}{p^2})^2-2\cdot\frac{1}{4p^4}=p^4+2+\frac{1}{p^4}-\frac{1}{2p^4}=p^4+\frac{1}{2p^4}+2$

То есть, теперь нам нужно доказать, что

$p^4+\frac{1}{2p^4}+2\geq 2+\sqrt{2}$

7б

$p^4+\frac{1}{2p^4}\geq\sqrt{2}$

$p^4+\frac{1}{2p^4}-\sqrt{2}=(p^2)^2+\frac{1}{(\sqrt{2}p^2)^2}-2\cdot p^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}p^2}=(p^2-\frac{1}{\sqrt{2}p^2})^2$

Получаем, что $(p^2-\frac{1}{\sqrt{2}p^2})^2\geq 0$ (всегда верно), то есть

$p^4+\frac{1}{2p^4}+2\geq 2+\sqrt{2}$, ч.т.д

№3

Доказать: $\frac{a+b-c}{2c}+\frac{b+c-a}{2a}+\frac{a+c-b}{2b}\geq\frac{3}{2}\quad|\cdot 2$

7б

$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}-1\geq 3$

$(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})+(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})\geq 6\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2,\ \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2,\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2.$

Тогда:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a+b-c}{c}+\frac{b+c-a}{a}+\frac{a+c-b}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)-3\right)\geq\frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2},$$ ч.т.д.

№1

$$y^2(y-x+2)-y(x+4)+5x+7=0$$

$$y^3-y^2x+2y^2-yx-4y+5x+7=0$$

$$y^3+2y^2-4y+7-x(y^2+y-5)=0$$

$$x=\frac{y^3+2y^2-4y+7}{y^2+y-5}$$

$$\begin{array}{l|l} y^3+2y^2-4y+7 & y^2+y-5 \\ \hline y^3+y^2-5y & y+1 \\ \quad y^2+y+7 & \\ \quad y^2+y-5 & \\ \hline \qquad 12 & \end{array}$$

То есть $x=(y+1)+\frac{12}{y^2+y-5}$. Зная, что $x\in\mathbb{Z}$, получим, что

$12 \vdots (y^2+y-5) \Rightarrow y^2+y-5=\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12.$

Рассмотрим все случаи данного равенства.

1) $y^2+y-5=1$

$y^2+y-6=0$

$D=1-4\cdot1(-6)=25$

$\left[\begin{array}{l} y=\frac{-1+5}{2}=2 \ (\text{к}) \\ y=\frac{-1-5}{2}=-3 \ (\text{к}) \end{array}\right.$

2) $y^2+y-4=0$

$D=1-4\cdot1\cdot(-4)=17$ (корни уравнения $\notin\mathbb{Z}$)

3) $y^2+y-5=2$

$y^2+y-7=0$

$D=1-4\cdot1\cdot(-7)=29$ (корни ур-я $\notin\mathbb{Z}$)

4) $y^2+y-5=-2$

$y^2+y-3=0$

$D=1-4\cdot1\cdot(-3)=13$ (корни ур-я $\notin\mathbb{Z}$)

(5) $y^2+y-5=3$
$y^2+y-8=0$
$D=1-4\cdot1\cdot(-8)=49$
$\left[\begin{array}{l} y=\frac{-1+7}{2}=3 \ (к.) \\ y=\frac{-1-7}{2}=-4 \ (к.) \end{array}\right.$

(6) $y^2+y-5=-3$
$y^2+y-2=0$
$D=1-4\cdot1\cdot(-2)=9$
$\left[\begin{array}{l} y=\frac{-1+3}{2}=1 \ (к.) \\ y=\frac{-1-3}{2}=-2 \ (к.) \end{array}\right.$

(7) $y^2+y-5=4$
$y^2+y-9=0$
$D=1-4\cdot1\cdot(-9)=37$
(корни ур-я $\notin Z$)

(8) $y^2+y-5=-4$
$y^2+y-1=0$
$D=1-4\cdot1\cdot(-1)=5$
(корни ур-я $\notin Z$)

(9) $y^2+y-5=6$
$y^2+y-11=0$
$D=1-4\cdot1\cdot(-11)=45$
(корни ур-я $\notin Z$)

(10) $y^2+y-5=-6$
$y^2+y+1=0$
$D=1-4\cdot1\cdot1=-3$ (нет корней)

(11) $y^2+y-5=12$
$y^2+y-17=0$
$D=1-4\cdot1\cdot(-17)=69$
(корни ур-я $\notin Z$)

(12) $y^2+y-5=-12$
$y^2+y+7=0$
$D=1-4\cdot1\cdot7<0$ (нет корней)

То есть $y=2; -3; 3; -4$. Найдем х к данному:

при $y=2$: $x=\frac{8+4\cdot2-8+7}{4+2-5}=\frac{25}{1}=25$

при $y=-3$:
$x=\frac{-24+18+12+4}{9-3-5}=\frac{10}{1}=10$

при $y=3$:
$x=\frac{24+18\mp12+7}{9+3-5}=\frac{\cancel{61}\ 40}{7}\notin Z$

при $y=-4$
$x=\frac{-64+32+16+7}{16-4-5}=\frac{-9}{7}\notin Z$

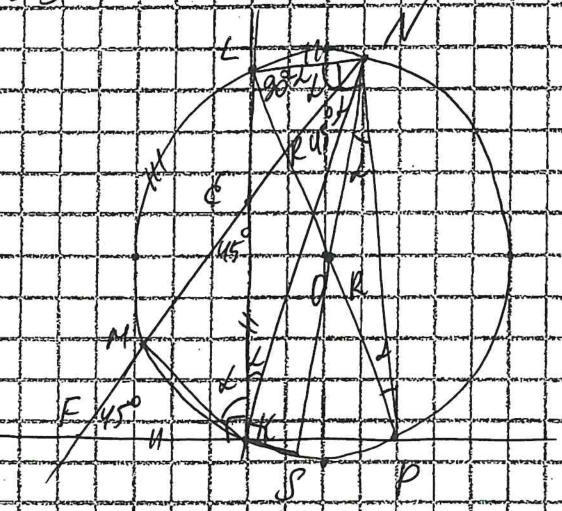
место для скобы

Шифр 7436

Не все пункты

Ответ: (25, 2); (10; −3)

№5



Дано:
△MNK вписан в окружность (O; R)
KC, KF — биссектрисы △MNK
$KC \cap MN = C$, $KF \cap MN = F$
$KC = FK$

Доказать:
$MK^2 + NK^2 = 4R^2$

5 б

Доказательство:

1. $\angle FKC = 90°$, так как биссектрисы смежных углов образуют прямой угол
2. △FKC — прямоугольный, $FK = KC$ $\Rightarrow \angle KFC = \angle FCK = 45°$

положение центра не обосновано

3. $\angle MKL = \angle LKM \Rightarrow \smile ML = \smile LN$
4. Продолжим биссектрисы KC и KF. Пусть $KC \cap$ Окр.(O; R) = L, $KF \cap$ Окр.(O; R) = P. Тогда LP — диаметр Окр.(O; R), где $LO = PO = R$
5. Соединим LN и PN. Получим △LNP — прямоугольный, т.к. $\angle LNP$ опирается на $LP = 2R$. Соединим NO и продолжим, получим △NKS — прямоугольный
6. В △KCN: $\angle CNK = 45° - \angle CKN$. В △LNP: $\angle LPN = \angle ONP = \angle CKN$ (пусть $\angle CNK = \alpha$)
7. В △LNP: $\angle NLP = 90° - \alpha$ (т.к. $\angle LNP = 90°$) ~~Тогда в △LON: $\angle LON = 180° - 90° - \alpha - 90° = 80° - \alpha = \angle SOP$~~

~~$\angle SOP = \angle ONP + \angle OPN = 2\alpha$, т.е. $180° - \alpha = 2\alpha$, $180° = 3\alpha \Rightarrow \alpha = 60°$~~. И

~~В △KNS~~: $\angle KNS = 90° - \alpha - \alpha - (45° - \alpha) = 45° - \alpha = \angle FNK \Rightarrow MK = KS$

8. Рассмотрим $\triangle KNS$: так как он прямоугольный, то:

$(NS)^2 = (2R)^2 = NK^2 + SK^2 = NK^2 + MK^2 = 4R^2$, ч.т.д.