Место для скобы

003806

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	1
3.	Класс	9
4.	Фамилия	КАУЧАКОВА
	Имя	МАРИНА
	Отчество	АНДРЕЕВНА
5.	Дата рождения	Число: 15; Месяц: 09; Год: 2005
6.	Страна	
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	Кемеровская обл.
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Новокузнецк
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБ НОУ „Лицей №84 им. В.А. Власова"

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Кауч

Место для скобы

Шифр 003806

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
20	30.03.21	Кудряшова Е. Е.	[signature]

№1. $\frac{2(a^4b+ab^4)}{a^2-ab+b^2}-\frac{(b^4-a^4)(b+a)}{a^2-b^2}$ при $a=-1,\underbrace{4\ldots4}_{2021}4$, $b=-1,\underbrace{5\ldots5}_{2020}6$

$$\frac{2(a^4b+ab^4)}{a^2-ab+b^2}-\frac{(b^4-a^4)(b+a)}{a^2-b^2}=\frac{2ab(a^3+b^3)}{a^2-ab+b^2}-\frac{(b^2-a^2)(b^2+a^2)(a+b)}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{2ab(a+b)\cancel{(a^2-ab+b^2)}}{\cancel{a^2-ab+b^2}}+\frac{\cancel{(b^2-a^2)}(b^2+a^2)(a+b)}{\cancel{(b^2-a^2)}}=2ab(a+b)+$$

$$+(b^2+a^2)(a+b)=(a+b)(2ab+b^2+a^2)=(a+b)(a+b)^2=(a+b)^3$$

При сложении $a=-1,\underbrace{4\ldots4}_{2021}4$ и $b=-1,\underbrace{5\ldots5}_{2021}6$ будет происходить увеличение ~~х~~ каждого разряда на 1, т.к. 4 и 6 в сумме дают 10, то 1 перейдет в последующий разряд и вместе 4 и 5 даст снова 10 ⇒ 1 перейдет опять в следующий разряд,

$$\begin{array}{r} 1,44444 \\ +\;1,55556 \\ \hline 3,00000 \end{array}$$

1	2	3	4	5	Σ
7	0	1	5	7	20

т.е. ~~$a=$~~ $a+b=-3$, тогда $(-3)^3=-27$

Ответ: -27.

X

№3.

$y=x^2+ax+b$, $y=x^2+cx+d$

A (1; 1) – общая точка

$$\begin{cases} 1=1^2+a\cdot1+b \\ 1=1^2+c\cdot1+d \end{cases}$$

$1^2+a+b=1^2+c+d$

$a+b=c+d$

Место для скобы

Шифр 003806

Возможно ли, чтобы $a^{2021} + d^{2020} > c^{2020} - b^{2021}$?

$$a^{2021} + b^{2021} > c^{2020} - d^{2020}$$

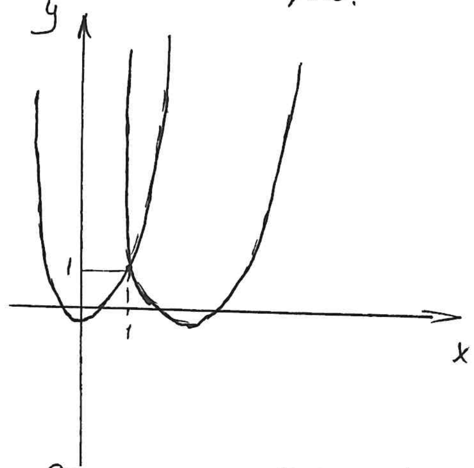
1) Случай, когда $a = b = c = d = 0$ не рассматривается, т.к. будет происходить наложение графиков.

$y = x^2 + ax + b$ - графиком яв-ся парабола ветви, которой направлены вверх

Вершина: $x_0 = -\frac{a}{2}$

$$y_0(x_0) = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + b = \frac{a^2}{4} * - \frac{a^2}{2} + b$$

$y = x^2 + cx + d$ - графиком яв-ся парабола ветви, которой направлены вверх.



Условно график будет выглядеть так.

2) Пусть $a^{2021} + b^{2021} > c^{2020} - d^{2020}$ - возможно

$c^{2020} > 0$; $\cancel{d > 2020}$ $d^{2020} > 0$

~~Если~~ $\cancel{|c^{2020} - d^{2020}| > 0}$

№4.

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab$$

Докажем методом мат. индукции

1) Проверим при $a = b = c = 1$

$1 + 1 + 1 \geq 1 + 1 + 1$ - верно

Место для скобы

Шифр 003806

2) Пусть это утверждение верно при $a=n$, $b=m$, $c=k$, т.е.
$n^4+m^4+k^4 \geq n^2mk+m^2nk+k^2nm$

3) Докажем, что утверждение верно при $a=n+1$, $b=m+1$, $c=k+1$, т.е.

$(m+1)^4+(n+1)^4+(k+1)^4 \geq (n+1)^2(m+1)(k+1)+(m+1)^2(n+1)(k+1)+(k+1)^2(m+1)(n+1)$

$)(m+1)^4+(n+1)^4+(k+1)^4 = n^4+6n^2+4n^3+4n+1+m^4+6m^2+4m^3+4m+1+k^4+$
$+6k^2+4k^3+4k+1$

$)(n+1)^2(m+1)(k+1)+(m+1)^2(n+1)(k+1)+(k+1)^2(m+1)(n+1) =$

$=(m+1)(n+1)(k+1)(n+1+m+1+k+1) = (m+1)(n+1)(k+1)(n+m+k+3) =$

$=(mn+m+n+1)(kn+km+k^2+3k+n+m+k+3) =$

$=(mn+m+n+1)(kn+km+k^2+4k+m+n+3) = mn^2k+m^2nk+k^2mn+$
$+4kmn+m^2n+n^2m+3mn+kmn+km^2+k^2m+4km+m^2+mn+3m+$
$+kn^2+kmn+k^2n+4kn+mn+n^2+3n+kn+km+k^2+4k+m+n+3=$

$= mn^2k+m^2nk+k^2mn+6kmn+m^2n+n^2m+5mn+k^2n+6kn+n^2+4n+$
$+m^2k+mk^2+5mk+m^2+4m+k^2+4k+3$

$)n^4+6n^2+4n^3+m^4+\cancel{4n}+6m^2+4m^3+\cancel{4m}+k^4+6k^2+4k^3+\cancel{4k}+\cancel{3} \geq m^2kn+$
$+kn^2m+k^2mn+6kmn+m^2n+n^2m+5mn+kn^2+6kn+n^2+\cancel{4n}+m^2k+mk^2+$
$+5mk+m^2+\cancel{4m}+k^2+\cancel{4k}+\cancel{3}$

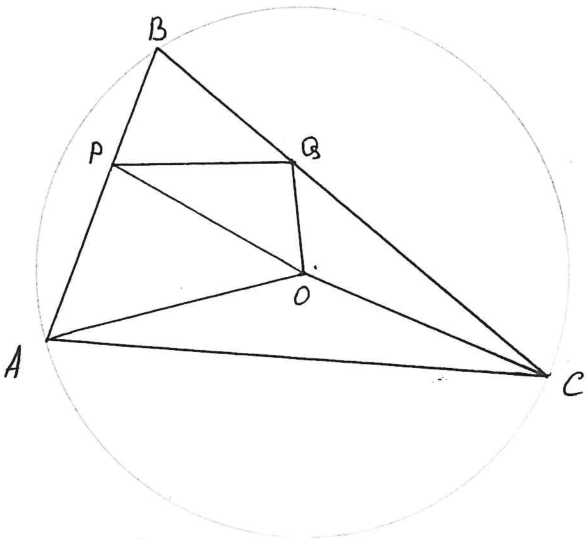
$n^4+6n^2+4n^3+m^4+6m^2+4m^3+k^4+6k^2+4k^3 \geq m^2kn+kn^2m+k^2mn+6kmn$
$+m^2n+n^2m+5mn+kn^2+6kn+n^2+m^2k+mk^2+5mk+m^2+k^2$

$n^4+m^4+k^4 \geq n^2mk+m^2nk+k^2nm$, ч.т.д.

Место для скобы

Шифр 0038076

№5.



Дано: окр. $(O; R)$

$\triangle ABC$ - вписанный в окр. $(O; R)$

$\angle AOC = 2\angle POQ$

$Q \in BC$, $P \in AB$

Возможно ли, что $P_{PBQ} < AC$ -?

Решение:

1) $P_{PBQ} = BQ + PQ + BP$ $(AO = OC = R)$

2) Условие существования $\triangle ABC$: $AC < AB + BC$

$\triangle AOC$: $AC < 2R$

$AB = BP + PA$, $BC = BQ + QC$, т.е. $AC < BP + PA + BQ + QC$

Условие существования $\triangle QOC$: $QC < QO + R$

$\triangle APO$: $AP < R + OP$

$\triangle PQO$: $PQ < PO + QO$

3) $AB + QC < QO + 2R + OP$, но

$PQ < PO + QO$

$AC < BP + PA + BQ + QC$, и $AC < 2R$, однако $AB + QC < QO + 2R + OR$

что противоречит тому, что $BQ + PQ + BP < AC$

Значит, не возможно.

Ответ: не возможно