Место для скобы

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

03728

Шифр

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	1
3.	Класс	10
4.	Фамилия	К А Ч Ч А К О В А
	Имя	М А Р И Н А
	Отчество	А Н А Р Е Е В Н А
5.	Дата рождения	15 (Число) 09 (Месяц) 2005 (Год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион *(пр: Томская обл., Калининградская область)*	Кемеровская область
8.	Вид муниципального образования *(пр: пгт, деревня, село, город)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Новокузнецк
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь в данное время	МБ НОУ „Лицей N84 им. В.А. Власова"

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Кач

Шифр 03728

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
21		Емельянова	Ем

1	2	3	4	5	Σ
7	3	7	4	-	

№1.

Найти: n ; $1!+2!+3!+...+n!$ = является точным квадратом.

Решение:

Частные случаи:

1) при $n=1$: $1!=1$, $1=1^2$

при $n=3$: $1!+2!+3!=1+2+6=9$, $9=3^2$

2) при любом n, $1!+2!+3!+...n!$ – нечетное число, так как факториал любого числа $m \geq 2$ – четный $(m! = 1 \cdot 2 \cdot \cancel{m} \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot m)$ $m! \vdots 2$

Значит, $2!+3!+...+n!$ – четное число (сумма четных чисел)

Тогда $1+2!+3!+...+n!$ – нечетное число (чет + нечет = нечет; чет + чет = чет; нечет + нечет = чет.)

3) при любом $n>3$ $1!+2!+3!+...+n!$ оканчивается на цифру 3.

$1!+2!+3!+4!+...+n! = 1!+2\cdot 1!+3!+3!\cdot 4+...+n! =$

$= 1!(1+2)+3!(1+4)+...+n! = 3+3!(1+4)+...+n!$

$m! \vdots 10$ при $m \geq 5$

Значит, в разряде единиц в числе $1!+2!+3!+...+n!$ стоит цифра 3

4) Цифра в разряде единиц для квадратов натуральных чисел:

1^2 – 1	10^2 – 0	19^2 – 1
2^2 – 4	11^2 – 1	20^2 – 0
3^2 – 9	12^2 – 4	...
4^2 – 16	13^2 – 9	
5^2 – 5	14^2 – 6	
6^2 – 6	15^2 – 5	
7^2 – 9	16^2 – 6	
8^2 – 4	17^2 – 9	
9^2 – 1	18^2 – 4	

Среди цифр последнего разряда точных квадратов, нет цифры „3". Следовательно $n=1$ и $n=3$ – единственные решения.

Ответ: $n=1$; $n=3$

[1 страница]

место скобы

Шифр 03728

№2

$p(x) = (a+1)x^2 - (a+1)x + 2022$

$-2022 \le p(x) \le 2022$ при $x \in [0;1]$, a_{max} - ?

1) Функция $p(x) = (a+1)x^2 - (a+1)x + 2022$: графиком является парабола, квадратичная функция.

Вершина: $x_0 = \frac{a+1}{2(a+1)} = \frac{1}{2}$, ось симметрии $x = \frac{1}{2}$

$y_0 = \frac{a+1}{4} - \frac{a+1}{2} + 2022$

Коэффициент при x^2 показывает на степень возрастания функции; чем он больше, тем больше прирост по Oy и меньше по Ox

2) $-2022 \le y_0$, если $a > -1$ $a > -1$ - ветви направлены вверх

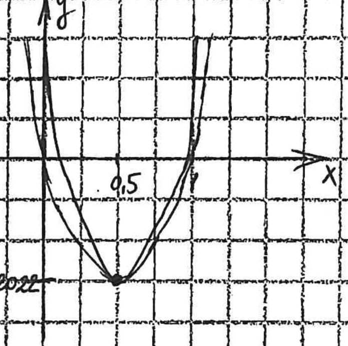
$2022 \ge y_0$, если $a < -1$ $a < -1$ - ветви вниз

Рассмотрим случай, когда $a > -1$ и $\frac{a+1}{2} + 2022 \le -2022$

$\frac{a+1}{2} = 2 \cdot 2022$

$a+1 = 4 \cdot 2022$, $a = 4 \cdot 2022 - 1$

Однако данный случай не удовлетворяет условию $p(x) \le 2022$



$$\begin{cases} \frac{a+1}{2} + 2022 \ge -2022 \\ a > -1 \\ p(0) = 2022 \\ p(1) = 2022 \\ \cancel{p(x)} \end{cases}$$

3) По Th обратной Th. Виета $x_1 x_2 = \frac{2022}{a+1} \Rightarrow \frac{2022}{a+1} < 1$

$a+1 < 2022$

$a < 2021 \Rightarrow a = 2020$ - максимальное значение

Ответ: 2020

МЕСТО скобы

Шифр 03728

№3

Найти: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Известно: $a^3-2022a+1011=0$, $b^3-2022b+1011=0$

$c^3-2022c+1011=0$

Решение:

1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}$

2) Пусть a_1, a_2, a_3 - корни уравнения $a^3-2022a+1011=0$

b_1, b_2, b_3 - $b^3-2022a+1011=0$

c_1, c_2, c_3 - $c^3-2022a+1011=0$ $\cancel{a_1 \neq b_1 \neq c_1}$

Тогда по Th обратной Th. Виета: $a_1\cdot a_2\cdot a_3=1011$

$b_1\cdot b_2\cdot b_3=1011$

$c_1\cdot c_2\cdot c_3=1011$

$a_1+a_2+a_3=2022$

$b_1+b_2+b_3=2022$

$c_1+c_2+c_3=2022$

Значит, $abc=1011$; $bc+ac+ab$ может быть равна

$bc+ac+ab=b_1c_2+a_3c_2+a_3b_1=b_2c_1+a_3c_1+a_3b_2=\ldots\neq$

3) Рассмотрим выражение $\frac{n_1+n_2+n_3}{n_1n_2\cdot n_3}=\frac{n_1}{n_1n_2n_3}+\frac{n_2}{n_1n_2n_3}+\frac{n_3}{n_1n_2n_3}=$

$=\frac{1}{n_2n_3}+\frac{1}{n_1n_3}+\frac{1}{n_1n_2}$

4) $bc+ac+ab=\frac{1011}{a_1}+\frac{1011}{a_2}+\frac{1011}{a_3} \Rightarrow bc+ac+ab=2022$

5) Значит $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2022}{1011}=2$

Ответ: 2

№4

Доказать: $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+bz)^2-(by+cx)^2-(cz-ay)^2\geq 0$

Доказательство:

1) Рассмотрим левую часть неравенства, раскроем скобки, приведем подобные слагаемые:

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+bz)^2-(by+cx)^2-(cz-ay)^2=$

$=a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2-(a^2x^2+2axbz+b^2z^2)-$

$-(b^2y^2+2bycx+c^2x^2)-(c^2z^2-2bczay+a^2y^2)=$

$=a^2z^2+b^2x^2+c^2y^2-2azbx-2bxcy+2cyaz$

2) Представим получившееся выражение в виде суммы или разности квадратов

$a^2z^2+b^2x^2+c^2y^2-2azbx-2bxcy+2cyaz=(az+bx)^2+c^2y^2-2bxcy+2cyaz=$

$=(az+bx)^2+c^2y^2-2bxcy+b^2x^2-b^2x^2+2cyaz=(az-bx)^2+(cy-bx)^2-$

$-b^2x^2+2cyaz=(az-bx)^2+(cy-bx)^2+(cy+az)^2-(b^2x^2+a^2z^2+c^2y^2)$

3) $(az-bx)^2\geq 0$, $(cy-bx)^2\geq 0$, $(cy+az)\geq 0$

$b^2x^2+a^2z^2+c^2y^2\geq 0$ и $(az-bx)^2+(cy-bx)^2+(cy+az)^2>b^2x^2+a^2z^2+c^2y^2$

Значит, $(az-bx)^2+(cy-bx)^2+(cy+az)^2-(b^2x^2+a^2z^2+c^2y^2)\geq 0$

Следовательно, $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+bz)^2-(by+cx)^2-(cz-ay)^2\geq 0$, ч.т.д.