ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

08170

Шифр

мет	Математика
ант	1
:	11
лия	КАШИНА
	ДАРЬЯ
тво	АНДРЕЕВНА
рождения	25 (Число) 04 (Месяц) 2005 (Год)
а	Россия
н *(пр: Томская обл., ...инградская область)*	Москва
ниципального образования *(...п, деревня, село, город)*	город
енный пункт *(пр: Томск, ...рово, Псков)*	Москва
е наименование ...овательного учреждения, ...ром Вы обучаетесь в ...е время	СУНЦ МГУ

...асие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail ...зультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ________

скобы

Шифр 08170а

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
20	6.04	Корякина Е.Е.	[signature]

1	2	3	4	5	Σ
2	0	7	7	4	20

3. $\frac{2a}{3(b+c)} + \frac{2b}{3(a+c)} + \frac{2c}{3(a+b)} \geq 1$

$\frac{a(a+c)(a+b) + \cancel{a} b(b+c)(a+b) + c(b+c)(a+c)}{(a+c)(a+b)(b+c)} \vee \frac{3}{2}$

$a^3 + a^2b + a^2c + abc + b^3 + b^2a + b^2c + abc + c^3 + c^2a + c^2b + abc \vee$

$\vee \frac{3}{2}(a^2b + a^2c + abc + ac^2 + ab^2 + abc + b^2c + c^2b$

$a^3 + a^2b + a^2c + b^3 + b^2a + b^2c + c^3 + c^2a + c^2b + \cancel{3abc} \vee \frac{3}{2} \cdot \cancel{2abc} +$

$+ \frac{3}{2}(a^2b + a^2c + ac^2 + ab^2 + b^2c + c^2b)$

$\cancel{2a^3 + 2a^2b + (2)}$

$2a^3 + 2a^2b + 2a^2c + 2b^3 + 2b^2a + 2b^2c + 2c^3 + 2c^2a + 2c^2b \vee 3a^2b$

$+ 3a^2c + 3ac^2 + 3ab^2 + 3b^2c + 3c^2b$

$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 \vee a^2b + a^2c + ac^2 + bc^2 + ab^2 + cb^2$

$a^3 + b^3 + a^3 + c^3 + b^3 + c^3 \vee a^2b + b^2a + a^2c + ac^2 + bc^2 + cb^2$

$a^2(a-b) + b^2(b-a) + a^2(a-c) + c^2(c-a) + b^2(b-c) + c^2(c-b) \vee 0$

$(a-b)(a^2-b^2) + (a-c)(a^2-c^2) + (b-c)(b^2-c^2) \vee 0$

$(a-b)(a-b)(a+b) + (a-c)(a-c)(a+c) + (b-c)(b-c)(b+c) \vee 0$

$\underbrace{(a-b)^2}_{\geq 0}\underbrace{(a+b)}_{>0} + \underbrace{(a-c)^2}_{\geq 0}\underbrace{(a+c)}_{>0} + \underbrace{(b-c)^2}_{\geq 0}\underbrace{(b+c)}_{>0} \vee 0$

$\Rightarrow (a-b)^2(a+b) + (a-c)^2(a+c) + (b-c)^2(b+c) \geq 0$

$\Rightarrow \frac{2a}{3(b+c)} + \frac{2b}{3(a+c)} + \frac{2c}{3(a+b)} \geq 1$ ч.т.д.

Шифр 08170а

1. $2x^2+2x^2z^2+z^2+7y^2-42y+33=0$

$\cancel{x^2(2+2z^2)+(z^2)+7y^2-42y+35-2}$

$z^2(2x^2+1)+2x^2+1+7y^2-42y+35-2=0$

$(2x^2+1)(z^2+1)+7(y^2-6y+5)=2$

$\underbrace{(2x^2+1)(z^2+1)}_{>0\ \text{всегда}}+7(y-1)(y-5)=2$

1) При $y\geq 6$ $\quad (2x^2+1)(z^2+1)+7(y-1)(y-5)>7\cdot 5\cdot 1=35>2$

$\Rightarrow$ такие y нам не подходят

2) При $y\leq 0$ $\quad (2x^2+1)(z^2+1)+7(y-1)(y-5)>7\cdot(-1)\cdot(-5)=35>2$

$\Rightarrow$ такие y нам не подходят

* при $y\in(-\infty;0]\cup[6;+\infty)$ значение левой части будет больше 35, это следует из графика параболы с ветвями вверх

3) $y=5$ или $y=1$ $\Rightarrow$ $\overbrace{(2x^2+1)}^{>0}\overbrace{(z^2+1)}^{>0}=2$

$\begin{cases}2x^2+1=1\\ z^2+1=2\end{cases}$ или $\begin{cases}2x^2+1=2\\ z^2+1=1\end{cases}$

$x=0 \quad z=\pm 1$ $\qquad \begin{cases}z=0\\ x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\end{cases}$ $\varnothing$ т.к. x - целое

4) $y=2$

$(2x^2+1)(z^2+1)+7\cdot 1\cdot(-3)=2$

$\underbrace{(2x^2+1)}_{>0}\underbrace{(z^2+1)}_{>0}=23$ $\qquad$ 23 - простое число $\rightarrow 23=1\cdot 23$ ед. разложение в целых положительных числах

$\begin{cases}2x^2+1=1\\ z^2+1=23\end{cases}$ или $\begin{cases}2x^2+1=23\\ z^2+1=1\end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ z = \pm\sqrt{22} \end{cases}$ $\varnothing$ т.к. z - целое или $\begin{cases} x = \pm\sqrt{11} \\ z = 0 \end{cases}$ $\varnothing$ т.к. x - целое

5) $y = 3$

$(2x^2+1)(z^2+1) + 7\cdot 2\cdot(-2) = 2$

$\underbrace{(2x^2+1)}_{>0}\underbrace{(z^2+1)}_{>0} = 30$

$30 = 1\cdot 30 = 2\cdot 15 = 3\cdot 10 = 5\cdot 6$ (все варианты разложений в целых положительных числах)

$\begin{cases} 2x^2+1 = 1 \\ z^2+1 = 30 \end{cases}$ $\varnothing$ т.к. z - целое

$\begin{cases} 2x^2+1 = 30 \\ z^2+1 = 1 \end{cases}$ $\varnothing$ т.к. x - целое

$\begin{cases} 2x^2+1 = 2 \\ z^2+1 = 15 \end{cases}$ $\varnothing$ т.к. x и z - целые

$\begin{cases} 2x^2+1 = 15 \\ z^2+1 = 2 \end{cases}$ $\varnothing$ т.к. x - целое

$\begin{cases} 2x^2+1 = 3 \\ z^2+1 = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 1 \\ z = \pm 3 \end{cases}$ подходит

$\begin{cases} 2x^2+1 = 10 \\ z^2+1 = 3 \end{cases}$ $\varnothing$ т.к. x, z - целые

$\begin{cases} 2x^2+1 = 5 \\ z^2+1 = 6 \end{cases}$ $\varnothing$ т.к. x, z - целые

$\begin{cases} 2x^2+1 = 6 \\ z^2+1 = 5 \end{cases}$ $\varnothing$ т.к. x - целое

6) $y = 4$

$(2x^2+1)(z^2+1) + 7\cdot 3\cdot(-1) = 2$

$(2x^2+1)(z^2+1) = 23$

Аналогично случаю 4, решений нет

Ответ: $(0;1;1)$; $(0;1;-1)$

$(0;5;1)$; $(0;5;-1)$

$(1;3;3)$; $(-1;3;-3)$

$(1;3;-3)$; $(-1;3;3)$

7

Шифр 08170а

4. $P(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b$, $a, b \neq 0$ - корни x_1, x_2, x_3

справедливо ли $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1$

$P(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b = 0$

По ~~мод~~ теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-a}{a} = 1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{b}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

$$\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{\frac{b}{a}}{-\frac{b}{a}}$$

$$\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = -1$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 1 \cdot (-1) = -1$$

ч.т.д.

Шифр

2. $2^{\lg(x^2-2023)} - \lg 2^{x^2-2022} = 0$

ограничения: $x^2-2023>0$

Пусть $t = x^2-2023>0$

$2^{\lg t} = \lg 2\cdot(t+1)$

$\lg t$ – монотонно возрастающая функция

$\Rightarrow 2^{\lg t}$ – монотонно возрастающая функция

При $t=1$: $2^{\lg t}=1$

$\lg 2\cdot(t+1) = 2\lg 2$

$1 \vee 2\lg 2$

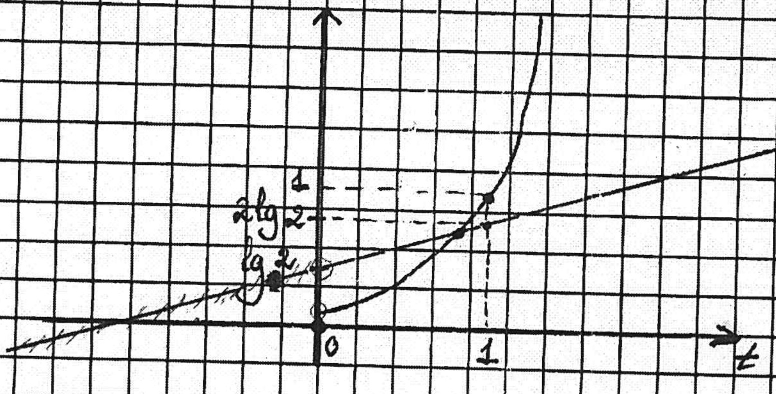
$\frac{1}{2} \vee \lg 2$

$\sqrt{10} \vee 2$

$10>4 \Rightarrow 1>2\lg 2$

При $t\to 0$: $\lg t \to -\infty$ т.е. $2^{\lg t}\to 0$

При $t=0$: $\lg 2(t+1) = \lg 2 \Rightarrow$ значение $2^{\lg t}$ меньше $\lg 2(t+1)$ при $t\to 0$

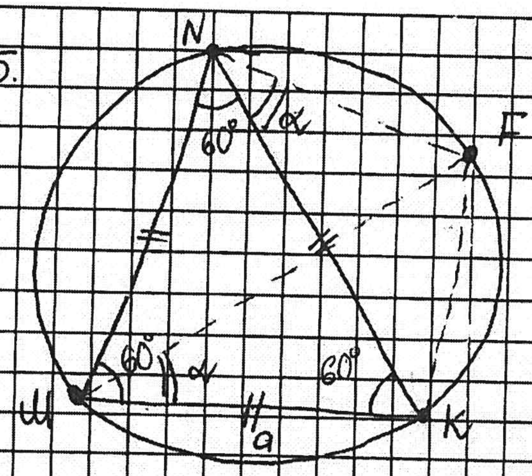


Из графика видно, что корень уравнения может быть только один

Отв. ~~1~~ 1

Шифр

5.



Дано:

$\triangle MNK$ – равносторонний и вписанный в окружность

Док-ть:

$FM^4 + FN^4 + FK^4 = const$

Док-во: Пусть $MK = KN = MN = a$, $\angle NMF = \angle NKF = 60^\circ - \alpha$ как углы опир. на 1 дугу

$\Rightarrow FN^2 = a^2 + FM^2 - 2FM \cdot a \cdot \cos(60^\circ - \alpha) = a^2 + FK^2 - 2FK \cdot a \cdot \cos(60^\circ - \alpha)$

$\cancel{a^2} + FM^2 - 2FM \cdot a \cdot \cos(60^\circ - \alpha) = \cancel{a^2} + FK^2 - 2FK \cdot a \cdot \cos(60^\circ - \alpha)$

$FM^2 - FK^2 = 2a\cos(60^\circ - \alpha)(FM - KF)$

$(FM - FK)(FM + FK) = 2a \cdot \cos(60^\circ - \alpha) \cdot (FM - FK)$

$(FM - FK)(FM + FK - 2a \cdot \cos(60^\circ - \alpha)) = 0$

$\left[\begin{array}{l} FM = FK \\ FM + FK = 2a \cdot \cos(60^\circ - \alpha) \end{array}\right.$

$\angle FNK = \angle FMK = \alpha$ как углы опирающиеся на 1 дугу

$\Rightarrow FK^2 = a^2 + FM^2 - 2a \cdot \cos\alpha \cdot FM = a^2 + FN^2 - 2a\cos\alpha \cdot FN$ (по т. косин.)

$\cancel{a^2} + FM^2 - 2a \cdot \cos\alpha \cdot FM = \cancel{a^2} + FN^2 - 2a\cos\alpha \cdot FN$

$FM^2 - FN^2 = 2a\cos\alpha\,(FM - FN)$

$(FM - NF) \cdot (FM + FN - 2a\cos\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} FM = NF \\ FM + FN = 2a\cos\alpha \end{array}\right.$

Шифр

$FM^2 = a^2 + FN^2 - 2a\,FN\cdot\cos(60^\circ+\alpha)$ (по т. косинусов для $\triangle FNM$)

Если $FM = FN$:

$a^2 = 2a\cdot FN\cdot\cos(60^\circ+\alpha)$

$\angle NKM = \angle NFM = 60^\circ$ (как углы опир. на одну дугу)

и $FM = FN \Rightarrow FM = FN = a$ (т.к. $\triangle FNM$ – р/б, то углы при осн. по $60^\circ \Rightarrow$ он р/с)
и $\angle NFM = 60^\circ$

$\cancel{a^2} = 2\cancel{a^2}\cdot\cos(60^\circ+\alpha)$

$\cos(60^\circ+\alpha) = \frac{1}{2}$

$\alpha = 0$ т.е. (.)F совпадает с точкой K

т.е. $FM = FN = a$ и $FK = 0$

$FM^4 + FN^4 + FK^4 = 2a^4$, ~~когда либо ... либо ...~~

Аналогично если $FK = FM$: $FM^4 + FN^4 + FK^4 = 2a^4$

$FM^2 = a^2 + FK^2 - 2a\,FK\cdot\cos(60^\circ-\alpha)$

$a^2 = 2a\cdot FK\cdot\cos(60^\circ-\alpha)$ $FK = FM = a$?

$\cos(60^\circ-\alpha) = \frac{1}{2}$

$\alpha = 0$ т.е. (.) F совпадает с (.) K

т.е. $FM = FK = a$ и $FN = 0$

$FM^4 + FN^4 + FK^4 = 2a^4$

Тогда либо $FM = NF$ (не выполнено), либо $FM + FN = 2a\cos\alpha$

$a = 2a\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\alpha = 60^\circ$, но $\alpha = 0$ т.е. такого не может быть

Откуда следует?